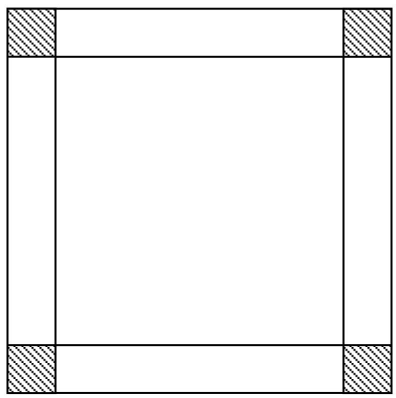
Probleme de optimizare rezolvate cu ajutorul derivatelor

1. Figura de mai jos reprezintă un pătrat de carton de dimensiune 30 cm din care se decupează zonele haşurate pentru a se construi o cutie.Determinaţi latura pătratului ce trebuie decupată pentru ca volumul obţinut să fie maxim.

   https://www.geogebra.org/m/sWvJYnkd

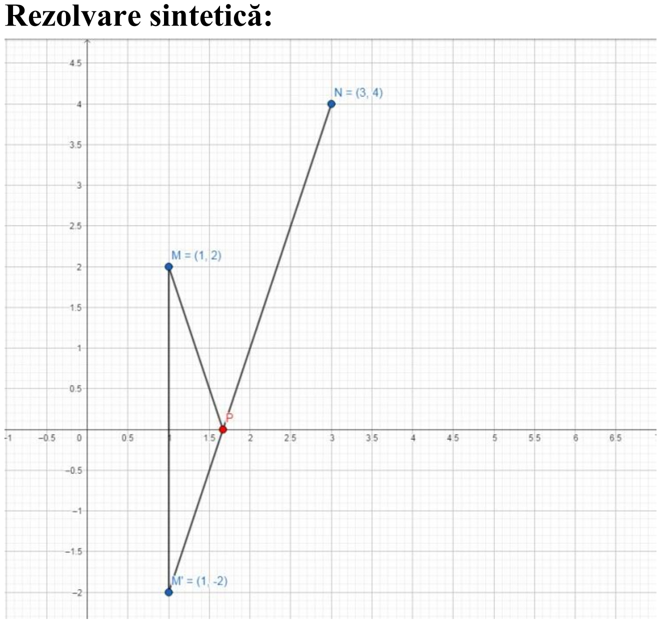
   Rezolvare:

   Notăm cu x latura pătratului ce trebuie haşurat. Volumul cutiei va fi $V = (30 - x)^2 \cdot x$

   Trebuie să găsim maximul funcţiei $f(x) = x \cdot (30 - x)^2 \Rightarrow x = 5$.

2. Fie punctele M(1, 2) şi N(3, 4). Determinați punctul P aparținând axei Ox, astfel încât MP+PN să fie minimă.

   Rezolvare sintetică:

Rezolvare analitică:

Fie P(x, 0).

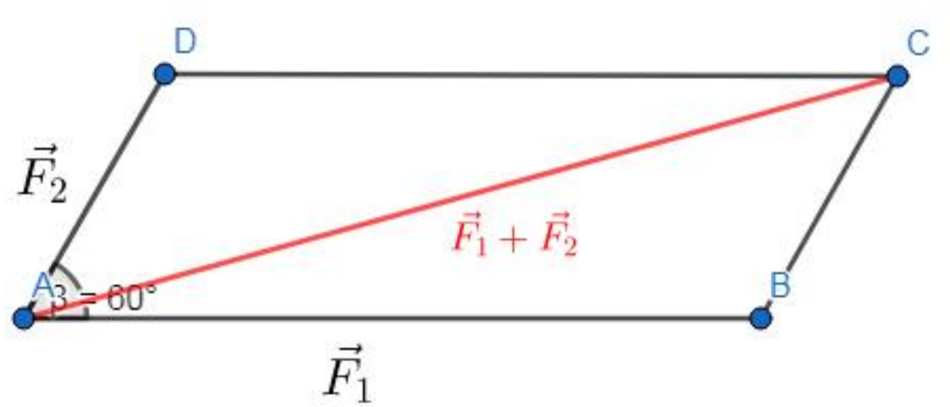
$MP = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$, $NP = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$

Considerăm $f: [1, 3] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$,

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}}$$

Din f'(x)=0 obținem $x = \frac{5}{3}$ (punct critic). Prin calcul direct obținem că $x = \frac{5}{3}$ este punct de minim.

3. Două forțe $\overrightarrow{F_1}$ și $\overrightarrow{F_2}$ au mărimile variabile cu suma 30 N, iar unghiul format de cele două are măsura de $\frac{\pi}{3}$. Determinați mărimile celor două forțe pentru care rezultanta este minimă.



Demonstrație:

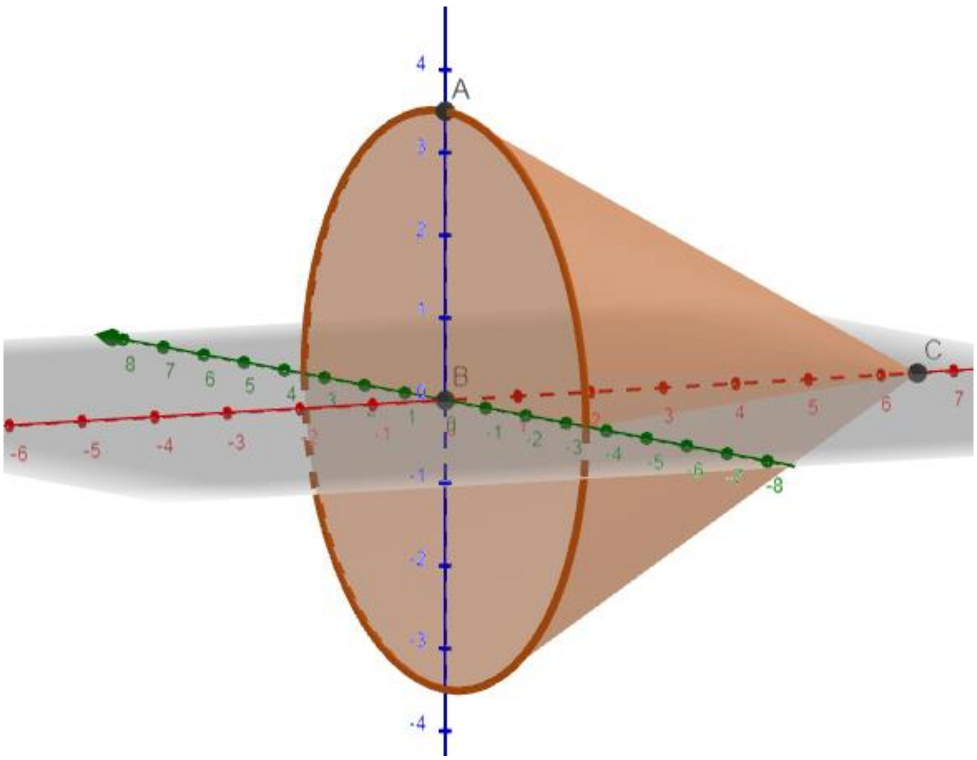
Fie $|\overrightarrow{F_1}| = x \Rightarrow |\overrightarrow{F_2}| = 30 - x$. $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = AC = \sqrt{x^2 + (30 - x)^2 - 2x(30 - x)cos\frac{2\pi}{3}} =$
$= \sqrt{x^2 - 30x + 900}$

Considerăm funcția $f: [0, 30] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 30x + 900}$

$f'(x) = \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+900}} \Rightarrow x = 15$ punct de minim.

4. Un triunghi dreptunghic are suma catetelor egala cu 10 și se rotește în jurul unei catete. Să se determine volumul maxim al corpului opținut prin rotirea triunghiului în juru unei catete.

https://www.geogebra.org/classic/runyj3fr



Demonstrație:

Fie AB=x, AC=10-x.

Volumul conului=$\frac{\pi x^2(10-x)}{3}$

Considerăm funcția $f:(0,10) \to \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{\pi x^2(10-x)}{3}$.

$f'(x) = \frac{\pi(20x-3x^2)}{3} => x = \frac{20}{3}$ punct de maxim.

5. Un salvamar aflat în punctul C situat la 0,1 km de țărm, dorește să salveze un turist aflat în punctul D (în mare) situat la 0.1 km de țărm. Știind că lungimea segmentului AB este de 1 km, determinați traiectoria pe care trebuie să se deplaseze salvamarul pentru a putea salva cât mai rapid turistul.

https://www.geogebra.org/calculator/uhmbadbn

Demonstrație:

$t_1 = \frac{CE}{v_1} = \frac{\sqrt{0.1^2+(1-x)^2}}{10}$, $t_2 = \frac{DE}{v_2} = \frac{\sqrt{0.1^2+x^2}}{1}$

Considerăm funcția $f: [0,1] \rightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = \frac{\sqrt{0.1^2+(1-x)^2}}{10} + \sqrt{0.1^2 + x^2}$.

$f'(x) = \frac{x-1}{10\sqrt{0.1^2+(1-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{0.1^2+x^2}}$,

Valoarea punctului de minim se obține aproximativ 0.01 cu ajutorul graficului derivatei.

https://www.geogebra.org/calculator/kxqe5n6a