

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a V – a

Problema 1. Fie numerele $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2024}$ și $B = 7 \cdot 7^3 \cdot 7^5 \cdot \dots \cdot 7^{89}$.

- a) Determinați ultima cifră a numărului B ;
- b) Comparați numerele $6A + 1$ și B .

Barem de corectare. a) Deoarece $B = 7^{1+3+5+\dots+89} = 7^{2025}$, (2p)

iar $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, rezultă că $u(7^{2025}) = u(7) = 7$; (2p)

b) Din $7A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2024} + 7^{2025}$ se obține $6A = 7^{2025} - 1$, (2p)

adică $6A + 1 = B$ (1p)

Problema 2. Pe o masă sunt 200 de bile. Alex și Bob ridică, pe rând, între 1 și 6 bile de pe masă. Câștigătorul jocului este cel care ridică ultima bilă. Știind că Alex este cel care începe jocul, stabiliți o strategie de câștig pentru acest jucător.

Barem de corectare. Restul împărțirii lui 200 la 7 este 4 (1p)

Dacă Alex ridică la începerea jocului 4 bile, iar apoi, de fiecare dată un număr de bile egal cu $7 - x$, unde x este numărul de bile ridicate la pasul anterior de către Bob, atunci, înainte de ultima ridicare a lui Bob vor rămâne exact 7 bile, ceea ce îl face pe Alex câștigător. (6p)

Problema 3. Fie numărul $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2024 + 2025$.

- a) Aflați suma ultimelor 224 de cifre ale numărului N ;
- b) Care este restul împărțirii numărului N la 10^{225} .

Barem de corectare. a) Deoarece numărul $p = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2024$ conține factorii $\underbrace{10, 20, \dots, 2020}_{202 \text{ numere}}$,
 $\underbrace{100, 200, \dots, 2000}_{20 \text{ numere}}$, respectiv 1000 și 2000, rezultă că ultimele 224 cifre ale lui p sunt toate 0 .. (2p)

și astfel, suma ultimelor 224 de cifre ale lui $N = p + 2025$ este 9 (2p)

b) De exemplu, din produsul $2 \cdot 50$, vom mai avea încă cel puțin o cifră de 0, adică cel puțin ultimele 225 cifre ale lui p sunt toate 0. (1p)

Așadar, $N = 10^{225} \cdot n + 2025$ de unde se obține că restul împărțirii lui N la 10^{225} este 2025 (2p)

Problema 4. Determinați numerele naturale a, b și c , pentru care $a^2 + b^2 = 4^c + 207$.

Barem de corectare. Deoarece restul împărțirii unui pătrat perfect la 4 poate fi 0 sau 1, iar $207 = 4 \cdot 51 + 3$, rezultă că $c = 0$ **(3p)**

Așadar, problema se reduce la găsirea numerelor a și b pentru care $a^2 + b^2 = 208$. Cum $208 = 4^2 \cdot 13$, obținem succesiv $\begin{cases} a^2 = 4a_1^2 \\ b^2 = 4b_1^2 \end{cases} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 4 \cdot 13$, de unde $\begin{cases} a_1^2 = 4a_2^2 \\ b_1^2 = 4b_2^2 \end{cases} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 13$ **(2p)**

Astfel, obținem că $(a_2, b_2) = (2, 3)$ sau $(a_2, b_2) = (3, 2)$, de unde rezultă că $(a, b, c) = (8, 12, 0)$ sau $(a, b, c) = (12, 8, 0)$ **(2p)**

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VI – a

Problema 1.

- a) Să se demonstreze că numărul $a = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2025}$ este divizibil cu 4;
b) Să se arate că dacă $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^m = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n$, atunci $m = n = 0$.

Barem de corectare. a) Din $a = (3^0 + 3^1) + (3^2 + 3^3) + \dots + (3^{2024} + 3^{2025}) = 4(3^0 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2024})$, rezultă că $a : 4$ (2p)

b) Deoarece $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^m$ este un număr impar, rezultă că n este par (2p)

Dacă n este par, atunci restul împărțirii numărului $3^0 + 3^1 + \dots + 3^n = 1 + 4(3^1 + 3^3 + \dots + 3^{n-1})$ la 4 este 1 (1p)

Dar, cum pentru $m \geq 2$, restul împărțirii numărului $2^0 + 2^1 + \dots + 2^m = 3 + 4(1 + 2^1 + \dots + 2^{m-2})$ la 4 este 3, rezultă că $m = 0$ sau $m = 1$ (1p)

În final, se obține $m = n = 0$ (1p)

Problema 2.

- a) Să se afle numărul $\overline{abc}$, știind că $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ și $\overline{bc}$ sunt direct proporționale cu 27, 28 și 23.
b) Există numere naturale de forma $\overline{abc}$, astfel încât $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, și $\overline{bc}$ să fie direct proporționale cu n , $n + 1$ și $n + 2$, pentru un număr natural nenul n ? Justificați răspunsul.

Barem de corectare. a) Din ipoteză, rezultă că există un număr rațional $k > 0$, astfel încât $\frac{\overline{ab}}{27} = \frac{\overline{ac}}{28} = \frac{\overline{bc}}{23} = k$, de unde avem că $\overline{ab} = 27k$, $\overline{ac} = 28k$ și $\overline{bc} = 23k$ (2p)

Din $23 \cdot \overline{ab} = 27 \cdot \overline{bc}$, deoarece $(23, 27) = 1$ deducem că $\overline{bc} : 23$, adică k este natural..... (1p)

Astfel din $\overline{ab} = 27k < 99$, se obține că valorile posibile pentru k sunt 1, 2 și 3. Prin verificare, se obține $k = 2$ și $\overline{abc} = 546$ (1p)

b) Dacă există numerele naturale $\overline{abc}$ și n astfel încât $\frac{\overline{ab}}{n} = \frac{\overline{ac}}{n+1} = \frac{\overline{bc}}{n+2}$, atunci $\overline{ab} < \overline{ac} < \overline{bc}$, de unde rezultă că $a < b < c$ (1p)

Deoarece $\frac{\overline{ab}}{n} = \frac{\overline{ac}}{n+1} = \frac{\overline{bc}}{n+2} = \frac{\overline{ac} - \overline{ab}}{n+1-n} = \frac{\overline{bc} - \overline{ac}}{n+2-n-1}$, obținem că $c - b = 10(b - a) \geq 10$, ceea ce este imposibil. Așadar, răspunsul este NU..... (2p)

Problema 3. Pe tablă este desenat un unghi obtuz $\widehat{XOY}$. În interiorul unghiului, Andrei desenează n semidrepte $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, astfel încât

$$\widehat{XOA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \dots = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \widehat{A_nOY} = 3^\circ,$$

iar Bianca desenează m semidrepte $OB_1, OB_2, \dots, OB_m$, astfel încât

$$\widehat{XOB_1} = \widehat{B_1OB_2} = \dots = \widehat{B_{m-1}OB_m} = \widehat{B_mOY} = 5^\circ.$$

- Să se afle măsura unghiului $\widehat{A_5OB_7}$;
- Să se afle cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{XOY}$;
- Să se afle măsura unghiului $\widehat{XOY}$ știind că exact 8 dintre semidreptele din interiorul unghiului $\widehat{XOY}$ sunt desenate de ambii copii.

Barem de corectare.

- Avem $\widehat{A_5OB_7} = \widehat{XOB_7} - \widehat{XOA_5} = 35^\circ - 15^\circ = 20^\circ$ (2p)
- Dacă $\widehat{XOY} = p^\circ$, atunci din $p \in [3, 5]$ și $p > 90$, rezultă că cea mai mică valoare posibilă a măsurii unghiului $\widehat{XOY}$ este de 105° (2p)
- Presupunem că $\widehat{XOY} = k \cdot 15^\circ$. Două semidrepte OA_i și OB_j coincid (sunt desenate de ambii copii) dacă și numai dacă $\widehat{XOA_i} = \widehat{XOB_j} = x \cdot 15^\circ$, unde $x \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, adică numărul de semidrepte comune din interiorul unghiului $\widehat{XOY}$ este $k-1$. Așadar $k=9$, de unde obținem că $\widehat{XOY} = 135^\circ$ (3p)

Problema 4. Pentru fiecare număr natural n , se consideră mulțimea $A_n = \{d \in \mathbb{N} \mid 10^n \mid d\}$.

- Câte elemente are mulțimea A_{10} ? Câte dintre acestea sunt pătrate perfecte?
- Să se demonstreze că nu există două mulțimi B și C , pentru care să fie îndeplinite simultan condițiile: $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A_{2024}$ și suma elementelor mulțimii B este egală cu suma elementelor mulțimii C .

Barem de corectare. a) Deoarece numărul divizorilor lui $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ este $(10+1) \cdot (10+1) = 121$, rezultă că mulțimea A_{10} are 121 elemente. (1p)
 Un divizor al lui 10^{10} are forma $2^a \cdot 5^b$ cu $a, b \leq 10$. Acesta este pătrat perfect dacă a și b sunt numere pare, adică $a, b \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Așadar, numărul de pătrate perfecte din A_{10} este $6 \cdot 6 = 36$ (2p)

Notăm cu $S(X)$ suma elementelor unei mulțimi finite de numere, X .

- Dacă ar exista mulțimile B și C care să verifice condițiile din enunț, atunci am obține că $S(A_{2024}) = S(B) + S(C) = 2 \cdot S(B)$ este un număr par. (2p)
 Dar, cum în mulțimea A_{2024} avem 2025 termeni impari (divizorii numărului 5^{2024}), $S(A_{2024})$ este un număr impar. Așadar, nu există două mulțimi B și C care să verifice condițiile din enunț (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VII – a

Problema 1. Se consideră mulțimea:

$$A = \left\{ \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 5}}, \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 9}}, \frac{\sqrt{13} - \sqrt{9}}{\sqrt{9 \cdot 13}}, \dots, \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2021}}{\sqrt{2021 \cdot 2025}} \right\}$$

- a) Să se calculeze suma elementelor lui A ;
b) Arătați că suma elementelor oricărei submulțimi nevide a lui A **nu** este un număr natural.

Barem de corectare. a) Suma elementelor lui A este

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 5}} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 9}} + \dots + \frac{\sqrt{2025} - \sqrt{2021}}{\sqrt{2021 \cdot 2025}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = \frac{44}{45} \dots \dots \dots (4p) \end{aligned}$$

- b) Fie B o submulțime nevidă a lui A . Cum toate elementele lui A sunt pozitive și $S < 1$, rezultă că suma T a elementelor lui B verifică $0 < T < 1$, deci T nu este un număr natural. (3p)

Problema 2.

- a) Fie cifrele nenule a, b și c , astfel încât $\sqrt{0,0(a) + 0,0(b) + 0,0(c)} \in \mathbb{Q}$. Arătați că $\sqrt{(a+b+c)^{2025} + 2026} \notin \mathbb{Q}$.

- b) Determinați numerele naturale x și y , pentru care $\sqrt{x+24} = \sqrt{3^y+9} + 1$.

Barem de corectare. a) Deoarece $\sqrt{0,0(a) + 0,0(b) + 0,0(c)} = \frac{\sqrt{10(a+b+c)}}{30}$, obținem că $\sqrt{10(a+b+c)} \in \mathbb{Q}$, de unde rezultă că $a+b+c = 10$. Cum $(a+b+c)^{2025} + 2026 = 10^{2025} + 2026 = M_3 + 2$, acesta nu poate fi pătrat perfect, de unde rezultă că $\sqrt{(a+b+c)^{2025} + 2026} \notin \mathbb{Q}$. . (4p)

- b) Cum $x+24, 3^y+9 \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x+24} - \sqrt{3^y+9} \in \mathbb{Q}^*$, rezultă că $\sqrt{x+24}, \sqrt{3^y+9} \in \mathbb{Q}$ și că numerele $x+24$ și 3^y+9 sunt pătrate perfecte. Atunci există un număr natural $a \geq 3$, astfel încât $3^y+9 = a^2 \Leftrightarrow (a-3)(a+3) = 3^y$, de unde rezultă că există numerele $m, n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a-3 = 3^m, a+3 = 3^n$. Cum $m < n$, deducem că $a-3 \mid a+3$, de unde $a-3 \mid 6$, adică $a \in \{4, 5, 6, 9\}$. Verificând, obținem $a = 6, y = 3$ și $x = 25$ (3p)

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB > AD$ și E un punct în plan astfel încât $BDEC$ să fie trapez isoscel. Să se arate că:

- a) $AE \perp EC$; b) $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$.

Barem de corectare. a) Deoarece $ABCD$ este dreptunghi și $BDEC$ trapez isoscel rezultă că $AD \equiv BC \equiv DE$, deci $\triangle DAE$ este isoscel. Cum $AD \parallel BC$ și $BDEC$ trapez isoscel rezultă $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BDE$. adică DB este bisectoarea unghiului ADE , deci $DB \perp AE$. Cum $DB \parallel EC$ deducem că $AE \perp EC$(4p)

b) Deoarece $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC = 90^\circ$ obținem că patrulaterul $ADEC$ este inscriptibil, de unde $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DCE$. Cum $BDEC$ este trapez isoscel și $ABCD$ este dreptunghi, avem că $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CAB$, prin urmare $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$ (3p)

Problema 4. Fie $ABCD$ un pătrat. Notăm cu M simetricul lui B față de C . Pe semidreapta $[CA$ se consideră punctul N astfel încât $\sphericalangle NMB = 30^\circ$. Dreapta MN intersectează AD și BD în punctele P respectiv Q .

- Să se calculeze măsura unghiului BQP .
- Să se arate că $BP \equiv BQ$.

Barem de corectare. a) Cum $ABCD$ este pătrat, rezultă că $\sphericalangle DBC = 45^\circ$, de unde $\sphericalangle PQB = \sphericalangle BMQ + \sphericalangle QBC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ \dots\dots\dots (3p)$

b) Fie $\{E\} = DC \cap MN$. În triunghiurile CME și DPE aplicând teorema unghiului de 30° obținem $ME = 2CE$ și $EP = 2ED$ de unde $MP = ME + EP = 2(CE + ED) = 2CD = 2BC = MB$. Atunci triunghiul MBP este isoscel și $\sphericalangle MPB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BMP) = 75^\circ$. Prin urmare $\sphericalangle PQB = \sphericalangle QPB = 75^\circ$ deci $\triangle BPQ$ este isoscel și $BP \equiv BQ$ (4p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

Problema 1. Determinați tripletele (x, y, z) de numere întregi știind că

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + |4z - 5| + 11 = 0.$$

Barem de corectare. Relația dată se scrie echivalent $(x - 2)^2 + (2y + 3)^2 + |4z - 5| = 2$. **(2p)**

Cum $x, y, z \in \mathbb{Z}$, obținem că $(x - 2)^2, (2y + 3)^2, |4z - 5| \in \mathbb{N}$, iar din faptul că ultimele două numere sunt impare, rezultă că $(2y + 3)^2 = |4z - 5| = 1$ și $(x - 2)^2 = 0$, **(3p)**

de unde obținem că $(x, y, z) \in \{(2, -1, 1), (2, -2, 1)\}$ **(2p)**

Problema 2. Fie $E(n) = \sqrt{4n^2 + n}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați $[E(n)]$;

b) Arătați că pentru $n \geq 2$, primele două zecimale ale numărului $E(n)$ sunt 2 și 4.

Notă. $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x .

Barem de corectare. a) Din $4n^2 \leq 4n^2 + n < (2n + 1)^2$, rezultă că $[E(n)] = 2n$ **(3p)**

b) Deoarece $E(n) = [E(n)] + \{E(n)\} = 2n + \{E(n)\}$, primele două zecimale ale numărului $E(n)$ sunt 2 și 4 dacă $[100 \cdot \{E(n)\}] = 24 \Leftrightarrow [100(E(n) - 2n)] = 24$. Pentru aceasta, se arată că $2n + \frac{6}{25} \leq \sqrt{4n^2 + n} < 2n + \frac{1}{4}$, pentru $n \geq 2$ **(4p)**

Problema 3. Fie $x, y, z > 0$. Să se arate că:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}};$

b) $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9;$

c) dacă $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 2025$, atunci

$$\frac{x(2x+1) + y(2y+1)}{xy} + \frac{y(2y+1) + z(2z+1)}{yz} + \frac{z(2z+1) + x(2x+1)}{zx} \geq \frac{2702}{225}.$$

Barem de corectare. Pentru demonstrarea inegalităților de la a) și b) se acordă câte 2 puncte.

c) Cum $M_s = 2 \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{y^2 + z^2}{yz} + \frac{z^2 + x^2}{zx} \right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right), \dots$ **(3p)**

din $\frac{x^2 + y^2}{xy}, \frac{y^2 + z^2}{yz}, \frac{z^2 + x^2}{zx} \geq 2$ **(1p)**

și din inegalitățile de la a) și b) obținem

$$M_s \geq 12 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \geq 12 + 2 \cdot \frac{9}{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}} \geq 12 + 2 \cdot \frac{9}{2025} = \frac{2702}{225}. \quad \textbf{(3p)}$$

Problema 4. Fie M și N mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $C'D'$ ale cubului $ABCD A'B'C'D'$.

- a) Arătați că $MN \parallel (A'BD)$ și determinați tangenta unghiului dintre dreapta CN și planul $(A'AC)$.
- b) Determinați cosinusul unghiului dintre dreptele AM și BN .

Barem de corectare. a) MN este linie mijlocie în triunghiul $C'B'D'$, deci $MN \parallel B'D'$. Dar $BDD'B'$ este paralelogram, deci $B'D' \parallel BD$, de unde rezultă că $MN \parallel BD$. Cum $BD \subset (A'BD)$, obținem $MN \parallel (A'BD)$ (2p)

Din $MN \parallel B'D'$, $B'D' \perp A'C'$, $B'D' \perp AA'$, $A'C', AA' \subset (A'AC)$, $A'C' \cap AA' \neq \emptyset$, obținem $MN \perp (A'AC)$ (2p)

Dacă $MN \cap A'C' = \{S\}$, atunci $\angle(CN, (A'AC)) = \widehat{NCS}$. În triunghiul $\triangle NSC$, dreptunghic în S , obținem $\operatorname{tg} \widehat{NCS} = \frac{NS}{SC}$ și calculând NS , SC în funcție de lungimea $2x$ a muchiei cubului, rezultă $\operatorname{tg} \widehat{NCS} = \frac{1}{3}$ (2p)

b) Fie $E \in D'C'$, astfel încât $D' \in (EC')$ și $D'E = \frac{D'C'}{2}$. Se arată că $ABNE$ este paralelogram. Prin urmare, $BN \parallel AE$ și $\angle(AM, BN) = \angle(AM, AE)$. Se arată că $AM = AE = 3x$, iar $EM = x\sqrt{10}$ și se obține $\cos \widehat{EAM} = \frac{4}{9}$ (1p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N și P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{n+4} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{n+1}{n+4} \cdot \overrightarrow{BA}$, respectiv $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{n+2}{n+4} \cdot \overrightarrow{CB}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că există un număr $\alpha > 0$, astfel încât $\overrightarrow{MB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CM}$;

b) Să se determine valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât dreptele AM , BN și CP să fie concurente.

Barem de corectare. a) Din relația $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{n+4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{n}{n+4} \cdot \overrightarrow{AC}$, care se scrie echivalent $n(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow n \cdot \overrightarrow{CM} = 4 \cdot \overrightarrow{MB}$, rezultă că $M \in (BC)$ și $\overrightarrow{MB} = \frac{n}{4} \cdot \overrightarrow{CM}$, adică $\alpha = \frac{n}{4}$. (3p)

b) Analog, din celelalte două relații se obține că $N \in (AC)$, $P \in (AB)$, $\frac{NC}{NA} = \frac{n+1}{3}$ și $\frac{PA}{PB} = \frac{n+2}{2}$. Dreptele AM , BN și CP sunt concurente, dacă și numai dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 24$, de unde se obține că $n = 2$. (4p)

Problema 2. Fie a, b și c trei numere reale care verifică relațiile $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ și $abc = 48$. Să se calculeze $ab + ac + bc$ și valoarea expresiei

$$E = \frac{1}{ab + c - 11} + \frac{1}{bc + a - 11} + \frac{1}{ca + b - 11}.$$

Barem de corectare. Avem $ab + ac + bc = \frac{1}{2}((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = 44$, (2p)

respectiv $E = \frac{1}{ab - a - b + 1} + \frac{1}{bc - b - c + 1} + \frac{1}{ca - c - a + 1} = \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(a-1)(c-1)}$. (3p)

de unde $E = \frac{a + b + c - 3}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \frac{a + b + c - 3}{abc - (ab + ac + bc) + (a + b + c) - 1} = \frac{3}{5}$. (2p)

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) dacă m și n sunt două numere naturale de aceeași paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2};$$

b) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}.$

Barem de corectare. a) Inegalitatea se scrie echivalent, $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$ (2p)

Cum numerele m și n au aceeași paritate, $\text{sgn}(a^m - b^m) = \text{sgn}(a^n - b^n)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, de unde obținem că $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$, adică are loc inegalitatea din enunț. (2p)

b) Folosind inegalitatea de la punctul a), avem $M_s = \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^6+b^6}{2}$ (3p)

Problema 4. Fie numerele $m, n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m, n) = 1$.

a) Să se arate că mulțimea $\left\{ \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}$ are n elemente;

b) Să se calculeze $S = \sum_{k=1}^n \left[\frac{mk}{n} \right].$

Notă. $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x .

Barem de corectare. a) Dacă $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $i \neq j$, atunci $\left\{ \frac{mi}{n} \right\} = \left\{ \frac{mj}{n} \right\} \Leftrightarrow \frac{mi}{n} - \frac{mj}{n} = \frac{m(i-j)}{n} \in \mathbb{Z}$. Dar cum $(m, n) = 1$, rezultă că $n \mid i - j$, ceea ce este imposibil deoarece $0 < |i - j| < n$. Așadar, mulțimea $\left\{ \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}$ are n elemente. (3p)

b) Pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, din teorema împărțirii cu rest, există un $q_k \in \mathbb{N}$ și un $r_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, astfel încât $mk = n \cdot q_k + r_k$, de unde $\left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \left\{ q_k + \frac{r_k}{n} \right\} = \frac{r_k}{n}$. Obținem astfel

că $\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$ (2p)

Așadar, $S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{mk}{n} - \left\{ \frac{mk}{n} \right\} \right) = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{mk}{n} \right\} = \frac{m(n+1)}{2} - \frac{n-1}{2}$ (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X - a

Problema 1. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, unde $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (n radicali). Să se arate că, pentru orice $n \geq 1$, au loc relațiile:

$$a) x_n < 2; \quad b) 4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n.$$

Barem de corectare. Se observă că $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Se verifică prin inducție (4p)

b) Pentru orice $n \geq 1$, avem $4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n \Leftrightarrow 4x_{n+1} < x_n + 6 \Leftrightarrow 4\sqrt{2 + x_n} < x_n + 6 \Leftrightarrow (2 - x_n)^2 > 0$ ceea ce, deoarece $0 < x_n < 2$, este evident adevărat (3p)

Problema 2. Să se determine funcțiile injective $f, g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, care satisfac relațiile:

$$a) f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty);$$

$$b) g(x \cdot g(y)) = \frac{1}{g(g(x) \cdot y)}, \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty).$$

Barem de corectare. a) Din ipoteză, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$, rezultă că $f(x \cdot f(y)) = f(y \cdot f(x)) = f(x) \cdot f(y)$, de unde din injectivitatea lui f , obținem că $x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$. Așadar $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, de unde rezultă că există un $a > 0$, astfel încât $\frac{f(x)}{x} = a$, $\forall x \in (0, +\infty)$, adică $f(x) = a \cdot x$, $\forall x \in (0, +\infty)$ (3p)

b) Dacă în relația din enunț luăm $y = x$, obținem că $[g(x \cdot g(x))]^2 = 1$, de unde rezultă că $g(x \cdot g(x)) = 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Cum funcția g este injectivă, există un $a > 0$, astfel încât $x \cdot g(x) = a$, $\forall x \in (0, +\infty)$, adică $g(x) = \frac{a}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ (3p)

Verificarea soluțiilor obținute la punctele a) și b) (1p)

Problema 3. Să se calculeze $|z_1 + z_2 + z_3|$, știind că z_1, z_2 și z_3 sunt trei numere complexe cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Să se găsească trei numere complexe z_1, z_2 și z_3 care verifică aceste relații.

Barem de corectare. Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, rezultă că $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ și $\bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$, .. (2p)

iar din $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, rezultă că $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ (1p)

Așadar, dacă $z = z_1 + z_2 + z_3$, atunci $\bar{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{z_1z_2z_3} = \frac{z^2}{2 \cdot z_1z_2z_3}$ și

$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{z^3}{2 \cdot z_1z_2z_3}$. Astfel, obținem că $z^3 = 2 \cdot z_1z_2z_3 \cdot |z|^2 \Rightarrow |z|^3 = 2 \cdot |z|^2$, adică $|z| = 2$. (3p)

De exemplu, numerele 1 și $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ satisfac relațiile din problemă (1p)

Problema 4. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \leq 1$$

Barem de corectare. Dacă $s \in \begin{cases} (0, 1), & \text{dacă } a, b, c \in (0, 1) \\ (1, +\infty), & \text{dacă } a, b, c \in (1, +\infty) \end{cases}$ și notăm $\log_s a = A$,

$\log_s b = B$, $\log_s c = C$, atunci $A, B, C > 0 \dots\dots\dots (1p)$

Inegalitatea se scrie echivalent

$$\begin{aligned} \frac{A}{2A+B} + \frac{B}{2B+C} + \frac{C}{2C+A} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{2A}{2A+B} + \frac{2B}{2B+C} + \frac{2C}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{B}{2A+B} + 1 - \frac{C}{2B+C} + 1 - \frac{A}{2C+A} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} \geq 1 \dots (4p) \end{aligned}$$

Dar, din inegalitatea lui Titu Andreescu obținem $\frac{B}{2A+B} + \frac{C}{2B+C} + \frac{A}{2C+A} = \frac{B^2}{B(2A+B)} +$

$\frac{C^2}{C(2B+C)} + \frac{A^2}{A(2C+A)} \geq \frac{(B+C+A)^2}{B(2A+B) + C(2B+C) + A(2C+A)} = 1$, ceea ce demonstrează inegalitatea dată. $\dots\dots\dots (2p)$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

Problema 1. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in M_4(\mathbb{R})$, unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 7, & \text{dacă } i = j \\ 5, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}, \quad \text{pentru } i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Să se calculeze A^n , pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem de corectare. Matricea A se scrie $A = 2 \cdot I_4 + 5 \cdot B$, unde $B = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$ cu $b_{ij} = 1$, pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ (1p)

Cum $B^2 = 4 \cdot B$, inductiv se obține că $B^k = 4^{k-1} \cdot B$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ (2p)

Așadar,

$$A^n = (2I_4 + 5B)^n = 2^n I_4 + \sum_{k=1}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k \cdot B^k = 2^n I_4 + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^{k-1} \right) \cdot B \dots\dots\dots (2p)$$

$$= 2^n I_4 + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} 5^k 4^k - 2^n \right) \cdot B = 2^n \cdot I_4 + \frac{1}{4} (22^n - 2^n) \cdot B \dots\dots\dots (2p)$$

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural și mulțimea

$$M = \{(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mid A \neq B \text{ și } AB = A + B\}.$$

a) să se arate că mulțimea M are o infinitate de elemente;

b) să se arate că dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = BA$.

Barem de corectare.

a) De exemplu, $\left(a \cdot I_n, \frac{a}{a-1} \cdot I_n\right) \in M$, pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ (3p)

b) Dacă $(A, B) \in M$, atunci $AB = A + B \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n$, adică matricele $A - I_n$ și $B - I_n$ sunt inversa una celeilalte, de unde rezultă că $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$. De aici se obține că $AB = BA = A + B$ (4p)

Problema 3. Să se calculeze:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k!}{b^k}, \text{ unde } a, b \in (0, +\infty); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Barem de corectare. a) Dacă notăm limita cu $L(a, b)$, atunci din lema Cesaro-Stolz, avem

$$L(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k!}{b^k}}{\frac{n!}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{b^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}} - \frac{n!}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1-a} \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{de unde } L(a, b) = \begin{cases} 0, & a < b \\ 1, & a = b \\ +\infty, & a > b \end{cases} \dots\dots\dots (1p)$$

b) Dacă notăm limita cu L , atunci

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x)}{x}} - e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} - 1}{x} \dots\dots\dots (2p)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} - 1}{\frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{x^2} \dots\dots\dots (1p)$$

$$= e^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2x+1}\right)}{\frac{x^2}{2x+1}} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) = e^2 \dots\dots\dots (1p)$$

Problema 4. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = \sqrt{2}$ și $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și să se calculeze limita.

Barem de corectare. Se demonstrează prin inducție că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 2$ (2p)

și că $x_{n+1} > x_n$ (2p)

Așadar, șirul este monoton și mărginit, deci convergent. Dacă notăm limita șirului cu l și trecem la limită în relația de recurență, obținem că $\sqrt{2}^l = l$ (1p)

Din $x_n < 2$ rezultă că $l \leq 2$, și cum singurele soluții ale ecuației $\sqrt{2}^x = x$ sunt $x = 2$ și $x = 4$ (o dreaptă intersectează graficul unei funcții strict convexe în cel mult două puncte), se obține că limita șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este $l = 2$ (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Fie $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, unde $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$.

a) Să se arate că G are o structură de grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor;

b) Să se calculeze P^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Barem de corectare. Dacă notăm $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $M(x) = I_3 + x \cdot A$, pentru

orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $A^2 = A$, obținem că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y + xy) = M((x+1)(y+1) - 1)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (2p)

a) Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $M(x) \cdot M(y) = M((x+1)(y+1) - 1) \in G$. Deoarece $M(x) \cdot M(y) = M(y) \cdot M(x) = M(x + y + xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, înmulțirea matricelor este asociativă, elementul neutru este $I_3 = M(0) \in G$, iar $M(x)^{-1} = M\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) \in G$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rezultă că $(G, \cdot)$ este un grup abelian. (3p)

b) Inductiv se demonstrează că $M(x)^n = M((x+1)^n - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, $P^n = M(6)^n = M(7^n - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (2p)

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \forall g \in G\}$. Să se arate că:

a) $Z(G)$ este un subgrup al lui G ;

b) dacă $x^2 = e$, pentru orice element $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.
(cu e s-a notat elementul neutru al grupului G)

Barem de corectare.

a) Evident, dacă $g \in G$, atunci $eg = ge = g$, adică $e \in Z(G)$. Dacă $x, y \in Z(G)$, atunci pentru orice $g \in G$, avem $(xy)g = x(yg) = x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy)$, respectiv $xg = gx \Leftrightarrow gx^{-1} = x^{-1}g$, adică $xy, x^{-1} \in Z(G)$ (3p)

b) Fie $x, y \in G$.

Dacă $x \in Z(G)$ sau $y \in Z(G)$, atunci $xy = yx$ (1p)

Presupunem acum că $x, y \notin Z(G)$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $(xy)y = y(xy) \Leftrightarrow xy^2 = yxy \Leftrightarrow xy = yx$, respectiv dacă $xy \notin Z(G)$, atunci $(xy)^2 = x^2 = y^2 = e$, de unde $(xy)^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow xyxy = x^2y^2 \Leftrightarrow yx = xy$ (3p)

Problema 3. Să se calculeze:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(4 - \sin^2 x)(1 + 2^x)} dx;$$

$$b) \int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx, \quad x \in (0, +\infty).$$

Barem de corectare. Notăm cu I integrala de la punctul a). Avem

$$a) \text{ Din } I \stackrel{-x=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t \cos t}{(4 - \sin^2 t)(1 + 2^t)} dx \stackrel{\text{not.}}{=} J, \text{ rezultă că } I + J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \frac{\ln 3}{2}, \text{ de unde}$$

$$I = J = \frac{\ln 3}{4} \dots \dots \dots (4p)$$

$$b) \int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)'}{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^2 + 2025} dx = \frac{1}{90} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{45} + c \dots \dots \dots (3p)$$

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$f(x) = 2(1 + x^2) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right), \quad \text{pentru fiecare } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:

a) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) există o singură funcție f care satisface condiția din enunț. Să se determine această funcție.

Barem de corectare. a) Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum f este continuă, rezultă că și funcția h este continuă, deci admite primitive. Dacă $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui h , atunci relația din enunț se poate scrie echivalent $f(x) = 2(1 + x^2) \cdot (1 + H(x) - H(0))$. Așadar, deoarece funcția H este derivabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că și f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (4p)

b) Din $h(x) = 2(1 + H(x) - H(0))$, rezultă că $h'(x) = 2 \cdot h(x)$, de unde $h(x) = c \cdot e^{2x}$. Cum $h(0) = 2$, se obține că $h(x) = 2 \cdot e^{2x}$, adică $f(x) = 2(1 + x^2) \cdot e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (3p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.