

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 1.

Să se determine funcțiile $f: N^* \rightarrow R$ cu proprietatea :

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \dots + n \cdot f(n) = f(n+1) - 1, \forall n \in N^*$$

Soluție.

Pentru $n=1$ relația devine $f(2) = 1 + f(1)$. (1 punct)

Pentru $n=2$ relația devine $f(1) + 2f(2) = f(3) - 1 \Leftrightarrow f(3) = 3(1 + f(1))$. (1 punct)

Pentru $n=3$ relația dată conduce la $f(4) = 12 \cdot (1 + f(1))$. (1 punct)

Prin inducție se arată că $f(n) = \frac{n!}{2}(1 + f(1))$, pentru orice $n \geq 2$. (unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)
(3 puncte)

Notând $f(1)=a$, unde a este un număr real, rezultă că funcțiile căutate sunt:

$$f: N^* \rightarrow R, f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ \frac{n!(a+1)}{2}, & n \geq 2 \end{cases} \quad (1 \text{ punct })$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 2.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{x^2 + 31x} + \sqrt{x + 31} = x + \sqrt{x} + 8$$

Soluție:

$$\sqrt{x(x + 31)} + \sqrt{x + 31} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$\sqrt{x + 31} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 8$$

$$(\sqrt{x} + 1) (\sqrt{x + 31} - \sqrt{x}) = 8$$

2p

$$\text{notăm } a = \sqrt{x + 31} \text{ și } b = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ a^2 - b^2 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + 1)(a - b) = 8 \\ (a - b)(a + b) = 31 \end{cases}$$

2p

$$\text{dar } a \neq b \Rightarrow \frac{b + 1}{a + b} = \frac{8}{31} \Leftrightarrow a = \frac{23b + 31}{8} \Rightarrow 15b^2 + 46b - 33 = 0$$

2p

$$b_1 = -\frac{11}{3}, \quad b_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25}$$

1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 3.

Fie rombul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei AC dacă și numai dacă $AM + DP = BN$.

Soluție:

Fie R mijlocul lui $[NP]$ iar $MR \cap AC = \{G\}$

Considerăm $\frac{MG}{GR} = k, AB = a, \dots\dots\dots 1p$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AM} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AR} = \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k} \frac{1}{2} (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{1}{1+k} \frac{AM}{a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + \frac{k}{2(1+k)} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{AM}{(1+k)a} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{BN}{a} \overrightarrow{BC} + \frac{k}{2(1+k)} \overrightarrow{AD} + \frac{k}{2(1+k)} \frac{DP}{a} \overrightarrow{DC} \\ &= \left(\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} \right) \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 2p\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC} \text{ coliniari} \Leftrightarrow \frac{AM}{(1+k)a} + \frac{k}{2(1+k)} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}$$

$$\frac{AM}{(1+k)a} + \frac{kDP}{2a(1+k)} = \frac{kBN}{2a(1+k)}$$

$$AM + \frac{k}{2} DP = \frac{k}{2} BN \quad (*) \dots\dots\dots 3p$$

$$G \text{ centru de greutate} \Leftrightarrow k = 2 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} AM + DP = BN \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX –a

PROBLEMA 4.

1. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.

a) Să se demonstreze că $\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = 0$.

b) Să se demonstreze că $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8}$.

Barem

a)

$$\frac{x-y}{xy+2z} + \frac{y-z}{yz+2x} + \frac{z-x}{zx+2y} = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} = \frac{x-y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y-z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z-x}{(x+y)(y+z)} = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(x+y)(y+z)(x+z)} = 0. \dots\dots\dots 3p$$

b) $\frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{y}{xy+2z} + \frac{z}{yz+2x} + \frac{x}{zx+2y} \Rightarrow \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{(x+z)(y+z)} + \frac{y+z}{(x+y)(x+z)} + \frac{z+x}{(x+y)(y+z)} \right) (1) \dots\dots\dots 1p$

Notăm. $x + y = a, y + z = b, z + x = c, a, b, c > 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{4} (3) \dots\dots\dots 1p$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{x}{xy+2z} + \frac{y}{yz+2x} + \frac{z}{zx+2y} \geq \frac{9}{8} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 1.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, \dots, z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$. Să se

arate că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Soluție:

Din $z_1 + z_2 + \dots + z_{2020} = 0$ rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_{2020}} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} = 0$ (2p)

$$\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| = \sum_{k=1}^{2020} |z_k| \cdot \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| = \sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \quad (2p)$$

Folosind inegalitatea triunghiului avem $\sum_{k=1}^{2020} \left| \frac{z}{z_k} - 1 \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{2020} z \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_{2020}} \right) - 2020 \right| = 2020$ (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 2.

Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ astfel încât

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$$

Soluție:

Notăm $\lg x - \lg 2020 = a$ și $\lg y - \lg 2020 = b$

Avem $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg x - \lg y = a - b$. (1p)

Ecuția devine $(a - b)^2 = -3ab$, adică $a^2 + ab + b^2 = 0$. (3p)

dacă $b \neq 0$ atunci avem ecuația $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$, nu are soluții reale

deci $b = 0$

Soluția unică a acestei ecuații omogene este $a = b = 0$. (2p)

Deci $x = y = 2020$. (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 3.

Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$

Soluție:

Observăm că $x=2$ este soluție. (1p)

Deoarece $x = \frac{1}{2}$ nu este soluție, putem împărți ecuația prin $\sqrt[5]{2x-1}$.

Obținem $\sqrt[5]{\frac{4x-5}{2x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-2}{2x-1}} = 1$. (1p)

Deoarece $\frac{4x-5}{2x-1} = 2 - \frac{3}{2x-1}$ și $\frac{x-2}{2x-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2x-1}\right)$ putem nota $-\frac{3}{2x-1} = t$ (2p)

Ecuația devine $\sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)} = 1$ (*).

Deoarece funcția $f(t) = \sqrt[5]{2+t} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}(1+t)}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, ecuația (*) are soluția unică

$t = -1$.

Deci $x=2$ soluție unică. (3p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X –a

PROBLEMA 4.

Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ care verifică simultan condițiile :

a) $f(x) \leq 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x+y) \leq f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluție :

Logaritmăm în baza 5 ambele relații și obținem :

$$\log_5(f(x)) \leq x \quad \text{și} \quad \log_5(f(x+y)) \leq \log_5(f(x)) + \log_5(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Notând $g(x) = \log_5(f(x))$ avem $g(x) \leq x$ (1) și $g(x+y) \leq g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Din (1) rezultă $g(0) \leq 0$ și din (2) pentru $x=y=0$ rezultă $g(0) \geq 0$, deci $g(0) = 0$ (2p)

Din (2) pentru $y = -x$ avem $0 = g(0) \leq g(x) + g(-x)$, adică $g(x) \geq -g(-x)$ (2p)

Din (1) $g(-x) \leq -x$, adică $-g(-x) \geq x$, deci $g(x) \geq x$(2p)

În concluzie $g(x)=x$, adică $f(x) = 5^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1p)

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^)$, $n \in \mathbb{N}$ impar*

Dacă $A \cdot A^t = I_n$, arătați că $\det(A^2 - I_n) = 0$, unde A^t este transpusa matricei A

Soluție:

$$\det(A^2 - I_n) = \det(A^2 - A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A - A^t) \quad (1) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dar } \det(A - A^t) = \det(A - A^t)^t = \det(A^t - A) = (-1)^n \det(A - A^t) = -\det(A - A^t)$$

$$\Rightarrow \det(A - A^t) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \det(A^2 - I_n) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent 2p

Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \Rightarrow l = 0$ sau $l = 1$

Cum șirul este descrescător, $l = 0$2p

b.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

.....3p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

- i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nesingulare;
- ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

Fie $X \in \mathcal{A}$, $X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$ a.î. $X^p = X^q$

$$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A} \dots\dots\dots 2p$$

- 1) Dacă $X^2 = I_2$, fie $\mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
Deci, $XY = Y \Rightarrow Y = I_2$, contradicție 1p
- 2) Dacă $X^2 \neq I_2$ cum $X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2$ deci, $\mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$$\det(X) = 1; X^2 - \text{Tr}(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = \text{Tr}(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$$

$$X^3 = \text{Tr}(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = \text{Tr}(X)(\text{Tr}(X)X - I_2) - X \Rightarrow (\text{Tr}(x)^2 - 1)X = (\text{Tr}(X) + 1)I_2$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$$

$$\text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+d = -1 \\ ad-bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{există o infinitate de matrice } X \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) \neq -1 \Rightarrow (\text{Tr}(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{\text{Tr}(X) - 1} \cdot I_2 \text{ și}$$

$$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{Tr}(X)-1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Tr}(x) = 2 \text{ sau } \text{Tr}(x) = 0 \text{ caz care nu convine} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin \frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem

$$f(x) + g(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1] \quad \dots\dots\dots 2p$$

Fie șirul

$$(x_n)_{n \geq 1} \text{ cu } x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad n \geq 1 \Rightarrow \sin \frac{1}{x_n} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = f(x_n)$ și $b_n = g(x_n) \quad \forall n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 1.

$$\text{Să se calculeze } \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx$$

Soluție:

$$\varphi(x) = 2\pi - x; \quad \varphi^{-1}(x) = 2\pi - x;$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} (-1) \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi - x}{\cos x} \cdot dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{2\pi}{\cos x} \cdot dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{x}{\cos x} \cdot dx \dots \dots 3p$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot dx = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \cdot dx = -\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2 - 1} \cdot dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+1} \right| =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right| = -\frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1)^2 = -\pi \ln(\sqrt{2}+1) \dots \dots \dots 4p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 2.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ notăm $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^n x dx$. Să se calculeze $\lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n}$.

Soluție (barem de corectare)

Funcția tangentă este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $0 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} 1 \quad \forall x \in [0, 1]$,

deci $0 \leq \operatorname{tg}^{2020} x \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \quad \forall x \in [0, 1]$ 1p

Atunci

$$0 \leq I_{m,2020} = \int_0^1 x^m \operatorname{tg}^{2020} x dx \leq (\operatorname{tg} 1)^{2020} \int_0^1 x^m dx = \frac{(\operatorname{tg} 1)^{2020}}{m+1} \rightarrow 0, \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} I_{m,2020} = 0 \quad \dots\dots\dots 2p$$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{\pi}{4} < \alpha < 1$ 1p

$$I_{1,n} = \int_0^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \int_{\alpha}^1 x \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_{\alpha}^1 \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha \int_{\alpha}^1 \operatorname{tg}^n x dx \geq \alpha = \alpha(1 - \alpha) \dots\dots\dots 2p$$

Cum $\operatorname{tg} \alpha > 1$ și $1 - \alpha > 0$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{1,n} = \infty$ 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 3.

Considerăm H_1, H_2, H_3 subgrupuri ale lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ avînd m, n respectiv p elemente, unde $(m, n) = 1$, $(n, p) = 1$ și $(m, p) = 1$. Să se determine numărul elementelor mulțimii $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Soluție:

H subgrup cu n elemente a lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$$H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow H = \{xx_1, xx_2, \dots, xx_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ pentru } \forall x \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (xx_1)(xx_2) \dots (xx_n) = x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x^n = 1 \Rightarrow H = U_n \dots \dots \dots 2p$$

Dacă $(m, n) = 1$ și x_0 rădăcină comună a ecuațiilor

$$x^m = 1 \text{ și } x^n = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \text{ și } 1 = km + ln \Rightarrow$$

$$x_0 = x_0^{km+ln} = (x_0^m)^k \cdot (x_0^n)^l = 1 \dots \dots \dots 3p$$

Dacă notăm $n(A)$ numărul de elemente ale mulțimii $A \Rightarrow$

$$n(H_1 \cup H_2 \cup H_3) =$$

$$= n(H_1) + n(H_2) + n(H_3) - n(H_1 \cap H_2) - n(H_1 \cap H_3) - n(H_2 \cap H_3) + n(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

$$= m + n + p - 2 \dots \dots \dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII –a

PROBLEMA 4.

Fie A un inel și $a, b \in A$ cu proprietatea că $a^2 + b^2 = ab$. Să se arate că $(ab)^2 = b^2a^2$ și $(ba)^2 = a^2b^2$.

Soluție (barem de corectare)

Din ipoteză obținem: $a(a^2 + b^2) = a^2b, (a^2 + b^2)b = ab^2$ și prin adunarea celor două avem

$$a^3 + b^3 = 0 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

Din $a^2(a^2 + b^2) = a^3b$ și din (1) obținem $a^2b^2 = -a^4 - b^4, (2) \dots\dots\dots 1p$

$$b(a^2 + b^2)a = baba \Rightarrow ba^3 + b^3a = (ba)^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (ba)^2 = -a^4 - b^4 \dots\dots\dots 1p$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} (ba)^2 = a^2b^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$(ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2 \stackrel{(2)}{=} a^4 + b^4 - a^4 - b^4 + b^2a^2 = b^2a^2 \dots\dots\dots 2p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;