



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a IX – a

1. FELADAT Igazoljátok, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ és bármely $a, n \in \mathbb{N}^*$, esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

a) $|x + a| + |x - a^2| \geq a^2 + a;$

b) $|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + n| + |x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - n^2| \geq \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

2. FELADAT Legyen $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \cdot \{x\} = 1\}$. Bizonyítsátok be, hogy:

a) ha $x \in A$, akkor $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2;$

b) ha $x_1, x_2, \dots, x_{2016} \in A$ és $x_1 < x_2 < \dots < x_{2016}$, akkor

$$\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2016}^2\} = \{x_1\}^2 + \{x_2\}^2 + \dots + \{x_{2016}\}^2.$$

3. FELADAT Adott az $ABCD$ konvex négyszög, melynek területe 27 m^2 és O az átlók metszéspontja. Igazoljátok, hogy az AOB , BOC , COD , DOA háromszögek súlypontjai egy paralelogramma csúcsai és számítsátok ki ennek a területét.

4. FELADAT Adott az $ABCD$ trapéz, $AB \parallel CD$ és $(AC) \cap (BD) = \{O\}$. Ha $M \in (AD)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy az M, O és N pontok kollineárisak, akkor:

a) fejezzétek ki az \overrightarrow{OM} és \overrightarrow{ON} vektorokat az \overrightarrow{OC} és \overrightarrow{OD} vektorok segítségével.

b) bizonyítsátok be, hogy : $\frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{NB}{CN} + \frac{MA}{DM} \right).$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a X – a

1. **FELADAT** Mutassátok ki, hogy $\left(\frac{\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \dots + \log_{2015} 2016}{2012}\right)^{2012} > 5$.

2. **FELADAT** Legyenek $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, úgy, hogy $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ és $|z_1| = |z_2| = 1$. Igazoljátok, hogy $|z_1 - z_2| = 1$.

3. **FELADAT** Határozzátok meg az összes olyan $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyekre teljesül, hogy

$$\ln(xy) \leq f(x) + f(y) - x - y \leq f(xy) - xy, \quad (\forall) x, y \in (0, \infty).$$

4. **FELADAT** Tekintsük az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ szürjektív függvényt és a szigorúan növekvő $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt, amelyekre $f(x) \geq g(x)$, minden $x \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Mutassátok ki, hogy $f(x) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{N}$;

b) Számoljátok ki: $f(1) - g(2) + f(3) - g(4) + \dots + f(2015) - g(2016)$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a XI – a

1. FELADAT Számítsátok ki:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x + 2} + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right);$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 3}).$

2. FELADAT Adott az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ matrix. Számítsátok ki: A^{2016} .

3. FELADAT Legyen $A \in M_2(\mathbb{R})$ úgy, hogy $\text{tr } A \neq 0$ és $\det(A^2 + (\det A + x) \cdot I_2) \geq 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mutassátok ki, hogy: $4 \cdot \det A \geq (\text{tr } A)^2$.

4. FELADAT Mutassátok ki, hogy nem létezik egyetlen olyan $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ függvény sem, amelyre teljesülne, hogy:

$$f^2(x) \geq f(x+y)(f(x)+y), \quad (\forall) x, y > 0.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 5.03.2016

Clasa a XII – a

1. **FELADAT** Számítsátok ki: $\int \frac{12x + 17}{(x + 2)(2x + 3)(3x + 4)(6x + 5) + 2016} dx, \quad x \in (0; \infty).$

2. **FELADAT** Legyen (G, \cdot) egy multiplikatív csoport, amelynek semleges eleme e és $x, y \in G$. Mutassátok ki, hogy ha $x^2 = e$ és $xyx = y^3$, akkor $y^8 = e$.

3. **FELADAT** Ha H_1 és H_2 két alcsoportja egy (G, \cdot) csoportnak úgy, hogy $G = H_1 \cup H_2$, akkor mutassátok ki, hogy $H_1 = G$ vagy $H_2 = G$.

4. **FELADAT** Legyen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy deriválható függvény amelyre teljesül, hogy:

$$(b - a) \cdot f'(x) \leq k, \quad (\forall) \quad x \in [a, b].$$

Mutassátok ki, hogy $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{k}{2} + f(a).$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.