



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a IX – a

1. Feladat Számítsátok ki a következő összeget: $S_n = 1 + 12 + 112 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n 2$, ha $n \geq 2$.

2. Feladat Legyen x, y és z szigoruan pozitív valós szám úgy, hogy $2x + 3y + 4z = 6$. Igazoljátok, hogy:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} + \sqrt{4z} < \frac{9}{2}$;

b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} \geq \frac{27}{2}$.

3. Feladat Mutassátok ki, hogy $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén (ahol $\lfloor x \rfloor$ jelöli az x szám egész részét)

4. Feladat Adott az $ABCDE$ konvex ötszög valamint G_1 és G_2 pontok az ABC , illetve BCD háromszögek súlypontjai.

a) Bizonyítsátok be, hogy ha M és N az $[AE]$ illetve $[DE]$ szakaszok felezőpontjai, akkor a

$[G_1N]$ és $[G_2M]$ szakaszoknak van egy G közös pontja úgy, hogy $\frac{G_1G}{GN} = \frac{G_2G}{GM}$;

b) Keressétek meg az előző pontban meghatározott G pont helyzetvektorát az A, B, C, D és E pontok helyzetvektorainak függvényében.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X – a

1. FELADAT Határozzátok meg azt az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függényt, amelyikre teljesül a következő tulajdonság:

$$f\left(\frac{x}{2015}\right) \leq \log_{2015} x \leq f(x) - 1, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

2. FELADAT a) Léteznek-e olyan a és b irracionális számok amelyekre a^b természetes szám?

b) Egy diák a táblára írja a következő számokat: 729, 15625, 343, 1331. Az 1 lépésben letörli a négy számot és mindegyik helyébe felírja a másik három szám mértani középátlóját. A 2 lépésben az 1 lépést ismétli az előzőekben megkapott számokra. Ilyen módon folytatja a számok felírását.

i) Milyen számokat kapott az első lépés után?

ii) Lehetséges-e, hogy véges számú lépés után a táblára a 847, 567, 297, 8019 számokat írja fel?

3. FELADAT Legyenek az $a, b \in \mathbb{Z}$ és $z \in \mathbb{C}$, számok úgy, hogy $z^2 - z + 5 = 0$. Mutassátok ki, hogy

$$(z - 1)^a - (z + 4)^b = 0$$

akkor és csakis akkor teljesül, ha létezik egy $n \in \mathbb{Z}$ szám úgy, hogy $a = 4n$ és $b = 2n$.

4. FELADAT Ha $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ és $|a + b|^2 = |b + c|^2 = |c + a|^2 = 4$, akkor mutassátok ki, hogy az ABC háromszög amelyiknek csúcsait az a, b és c komplex számok határozzák meg, derékszögű.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XI – a

1. Feladat Adott az $A \in M_3(\mathbb{R})$ mátrix úgy, hogy $\det(A + I_3) = \det(A + 2I_3)$. Bizonyítsátok be, hogy

$$2 \det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 3 \det(A).$$

2. Feladat Adott a következő mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix},$$

ahol a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát, valamint h_a, h_b, h_c a magasságainak hosszát jelöli. Mutassátok ki, hogy $\det A \geq 0$. Milyen feltételek mellett lesz $\det A = 0$?

3. Feladat Számítsátok ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n^2 + 5n + 9} \right\}$, ahol $\{x\}$ jelöli az x valós szám törtrészét.

4. Feladat Legyen $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat, ahol $x_1 = 3$ és $x_n = x_{n-1} + 2n + 1$, bármely $n \geq 2$.

a) Határozzátok meg a sorozat általános tagját;

b) Számítsátok ki $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right)$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 14.02.2015

Clasa a XII – a

1. Feladat Legyen $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, $O_2 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

a) Igazoljátok, hogy ha az $A \in G$ és $\det(A) = \widehat{0}$, akkor $A = O_2$;

b) Bizonyítsátok be, hogy $G \setminus \{O_2\}$ zárt részhalmaza az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ halmaznak a mátrixok szorzására nézve;

c) Állapítsátok meg, hogy az $X^{12} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ egyenletnek vannak-e megoldásai a G halmazban.

2. Feladat Legyen (G, \cdot) egy csoport és $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$ egy halmaz. Igazoljátok, hogy ha $x^2 = e$, bármely $x \in G \setminus Z(G)$ esetén, akkor a csoport kommutatív.

3. Feladat Adott az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ függvény. Számítsátok

ki $\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} dt$.

4. Feladat Határozzátok meg az $n \in \mathbb{N}$ azon értékeit, amelyekre

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2} dx \in \mathbb{Q}.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.