OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a

Barem de corectare

Problema 1

a.Verificarea inegalităţii prin calcul direct. **3 puncte**

b. Condiţiile $2y+z-2\geq 0;\ 10-y-z\geq 0;\ x-y-z+2\geq 0;\ 4-x+z\geq 0;\ z+y-x-2\geq 0$ implică $x-y-z+2=0$. Egalitatea din enunţ devine

$3\sqrt{y+x}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}=14$. **2 puncte**

$\left(3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}\right)^2\leq(3^2+2^2+1^2)(x+y+8-x+6-y)=14^2$.

1 punct

Avem egalitate dacă $\frac{3}{\sqrt{x+y}}=\frac{2}{\sqrt{8-x}}=\frac{1}{\sqrt{6-y}}$, de unde rezultă $x=4, y=5, z=1$. **1 punct**

Problema 2

$x-1<[x]\leq x;\ x^2-1<[x^2]\leq x^2, \forall\, x\in R$. **1 punct**

Fie $x\in A_n$; rezultă

$n\geq x^2+[x]>x^2+x-1$

de unde avem

$n+1>x^2+x\geq[x^2]+x$

deci $x\in B_{n+1}$, adică $A_n\subset B_{n+1}$. **3 puncte**

Fie $x\in B_n$; rezultă

$n\geq[x^2]+x>x^2-1+x$

de unde avem

$n+1>x^2+x\geq x^2+[x]$

deci $x\in A_{n+1}$, adică $B_n\subset A_{n+1}$. **3 puncte**

Problema 3

a. $\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **2 puncte** Construcţia punctelor M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **1 punct** Construcţia paralelogramelor $AMDN, ABEP$ **1 punct**

b. $\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\ \overrightarrow{AE}$ implică A, D, E coliniare **3 puncte**.

Str. Mihai Eminescu nr. 11, 410019, Oradea
Tel: +40 (0) 259 41 64 54,
Tel./fax: +40 (0) 359 43 62 07,
Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
+40 (0) 259 47 02 22,
Web: www.isjbihor.ro
E-mail: isjbihor@yahoo.com

Problema 4

Dacă $m \geq 500$ atunci ştergând, de exemplu, numerele de la 1 la 500, printre numerele rămase, de la 501 la 1000, nu există nici o pereche de numere care să poată fi divizibil unul cu celălalt, căci raportul lor este < 2. **2 puncte** Vom arăta că $m = 499$ are proprietatea cerută. **1 punct** Arătăm că printre oricare 501 numere de la 1 la 1000 există unul care să-l dividă pe altul. Fiecare din cele 501 numere este de forma $2^k(2t+1), 0 \leq k \leq 9, t$ natural; oricărui astfel de număr îi asociem $2t+1$. Există 500 de numere impare mai mici decât 1000, deci la două din cele 501 numere le va corespunde acelaşi număr impar. Dintre aceste două numere, unul se va obţine din celălalt prin înmulţire cu o putere a lui 2. **4 puncte**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.