



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

*Etapa locală - 09.02.2013*

### VII. osztály

#### 1. feladat

a) Adottak a következő számok  $A = \left( \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2012}}{2013} \right) - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012}} \right)$

$$B = \left( \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{2013}{\sqrt{2012}} \right) - \left( \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{6\sqrt{4}}{5} + \frac{8\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{2014\sqrt{2012}}{2013} \right).$$

Igazold, hogy  $|A + x| = |B - x|, \forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Old meg az  $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2012| = 2013(x-2013)$  egyenletet.

#### 2. feladat

a) Igazold, hogy bármely  $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$  esetén  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ .

b) Adott az  $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$  szám. Igazold, hogy  $0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3$ .

#### 3. feladat

Az  $ABCD$  trapézban tudjuk, hogy  $AD \parallel BC, AC \perp BD, AC = 6,5$  cm és  $BD = 4,8$  cm.

a) Számítsd ki az  $ABCD$  trapéz területét.

b) Az A ponton keresztül, a BD –vel húzott párhuzamos egyenes a BC egyenest az E pontban metszi. Számítsd ki az AEC háromszög területét.

#### 4. feladat

Az  $ABC$  általános háromszögben legyen  $D \in AB, B \in [AD]$  úgy, hogy  $[BD] \equiv [BC]$  és  $E \in AC$  úgy, hogy  $C \in [AE]$ . Tudva, hogy M az ABC és ACB szögek szögfelezőinek metszéspontja, N pedig a BCED négyszög átlóinak metszéspontja igazold, hogy BMCN akkor és csak akkor paralelogramma, ha  $[BC] \equiv [CE]$ .

**Megjegyzés:** a) Munkaidő 3 óra.

b) Minden feladat kötelező.

c) Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.