



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

IX. Osztály

1.Feladat

1. . Bizonyítsuk be, hogy $\forall n \in \mathbf{N}^*, 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} + \frac{2}{n+1} \in \mathbf{N}$.

2. . Bizonyítsuk be, hogy $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \in \mathbf{N}$.

2.Feladat

Ha x, y és z szigorúan pozitív valós számok, igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{(x+z)^2} \geq \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z}$.

b) $\frac{x+2y+z}{(x+z)^2} + \frac{x+y+2z}{(x+y)^2} + \frac{2x+y+z}{(y+z)^2} \geq 2 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right)$.

3.Feladat

Adott az ABC általános háromszög, melynek AB , BC és CA tartóegyenesein felvesszük az E , F és G pontokat $(B \in [AE], C \in [BF], A \in [CG])$ úgy, hogy $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{CF} = \frac{CA}{AG} = k$. Legyen M , N , K rendre az EF , FG és GE szakaszok felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és MNK háromszögek súlypontjai egybeesnek.

4.Feladat

Adott a páros természetes számokból álló szigorúan növekvő sorozat. Mutassuk ki, hogy az $[s_n; s_{n+1}]$ intervallumban létezik legalább egy teljes négyzet, ahol s_n az első n természetes szám összege az adott sorozatból és $n > 0$.

Megjegyzés: a) Munkaidő 3 óra.
b) Minden feladat kötelező.
c) Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak..