



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a XI-a

Problema 1

Aflați limita șirului definit prin relația de recurență $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ știind că $a_1 = 1$.

Problema 2

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $B = A^3 + A^2 + A + I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- Arătați că $(AB)^p = A^p B^p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$;
- Dacă $A^{2013} + A^{2014} + A^{2015} + A^{2016} = O_n$ atunci $(AB)^{2013} = O_n$.

Problema 3

Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $AB = I_n$ atunci

$$\det(A^2 + B^2 + 2A + 2B + 3I_n) \geq 0.$$

Problema 4

- Arătați că dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică și neconstantă, atunci nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodice cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$. Să se arate că cele două funcții au perioade egale și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.