



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a VII-a

Problema 1

a) Se dau numerele: $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{2012}}{2013} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2012}} \right)$

$$B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{2013}{\sqrt{2012}} \right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{6\sqrt{4}}{5} + \frac{8\sqrt{6}}{7} + \dots + \frac{2014\sqrt{2012}}{2013} \right).$$

Demonstrați că $|A + x| = |B - x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați ecuația: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 2012| = 2013(x - 2013)$

Problema 2

a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ avem $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$.

b) Se consideră numărul $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3$.

Problema 3

În trapezul $ABCD$ se știe că $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AC = 6,5$ cm și $BD = 4,8$ cm.

a) Calculați aria trapezului $ABCD$.

b) Paralela prin punctul A la dreapta BD intersectează dreapta BC în punctul E. Aflați aria triunghiului AEC.

Problema 4

Fie triunghiul oarecare ABC , punctul $D \in AB$, $B \in [AD]$, astfel încât $[BD] \equiv [BC]$ și $E \in AC$ astfel încât $C \in [AE]$. Dacă M este punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB, iar N este punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului BCED, arătați că BMCN este paralelogram dacă și numai dacă $[BC] \equiv [CE]$.

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

b) Toate problemele sunt obligatorii.

c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.