



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

Problema 1

1. Folosim : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ pentru sumele și ajungem la egalitatea:

$$S = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n \cdot (n+1)} + \frac{2}{n+1} \quad (1p); \quad S = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \quad (1p); \quad S = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2 \in \mathbf{N} \quad (1p).$$

2. Demonstăm cu inducție matematică: $P(n): \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \in \mathbf{N}$

$$P1: P(0): \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + \frac{0}{6} \in \mathbf{N} \quad (1p).$$

$$P2: P(k) \Rightarrow P(k+1), \quad P(k): \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \in \mathbf{N},$$

$$P(k+1): \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{(k+1)^2}{2} + \frac{(k+1)}{6} = (k+1) \left(\frac{(k+1)^2}{3} + \frac{(k+1)}{2} + \frac{1}{6} \right) = \quad (1p)$$

$$= (k+1) \left(\frac{k^2+2k+1}{3} + \frac{k+1}{2} + \frac{1}{6} \right) = (k+1) \left(\frac{k^2+2k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \quad (1p)$$

$$= \underbrace{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}_{\in \mathbf{N}} + \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}}_{\in \mathbf{N}} + \underbrace{k+1}_{\in \mathbf{N}} \in \mathbf{N} \quad (1p).$$

Problema 2

a). Ducem toți termenii în partea stângă și grupăm în mod convenabil:

$$\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{(x+z)^2} - \frac{1}{x+z} - \frac{1}{y+z} = \frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{(x+z)^2} - \frac{x+z}{(x+z)^2} - \frac{y+z}{(y+z)^2} =$$

$$= \frac{x-y}{(y+z)^2} - \frac{x-y}{(x+z)^2} = \frac{(x-y)(x^2+2xz+z^2-y^2-2yz-z^2)}{(y+z)^2(x+z)^2} = \quad (2p)$$

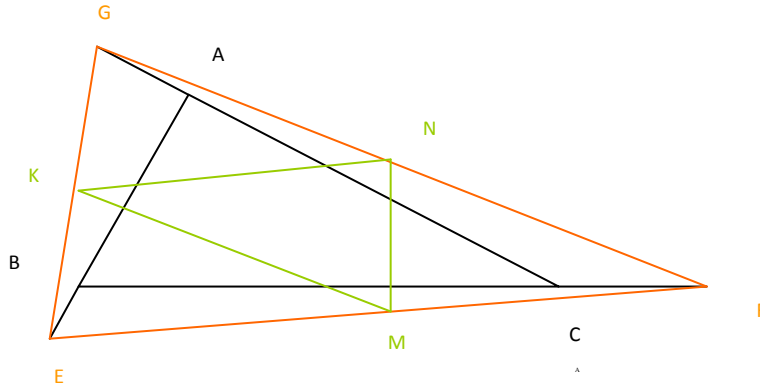
$$= \frac{(x-y)^2(x+y+2z)}{(y+z)^2(x+z)^2} \geq 0. \quad (2p)$$



Se observă că avem egalitate doar când $x=y$. **(1p).**

b). Permutând circular numere x , y și z între ele, scriem inegalitatea demonstrată în punctul a), pentru cele 3 cazuri. **(1p)**; Adunăm și găsim imediat inegalitatea de demonstrat. **(1p).**

Problema 3



Fie O un punct oarecare al planului, putem scrie: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$.

$$\text{Dar } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{AB} + \frac{k+1}{k}\overrightarrow{BC}\right).$$

Analog găsim și celelalte relații: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}$, unde $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{BC} + \frac{k+1}{k}\overrightarrow{CA}\right)$,

Respectiv $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}$, unde $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{CA} + \frac{k+1}{k}\overrightarrow{AB}\right)$. **(3p)**

Fie T centrul de greutate al triunghiului ABC , avem relația: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ **(1p)**

Fie T' centrul de greutate al triunghiului MNK .

$$\text{Avem } \overrightarrow{OT'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK}) = \quad \textbf{(1p)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB} + \frac{k+1}{2k}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{BC} + \frac{k+1}{2k}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2k}\overrightarrow{CA} + \frac{k+1}{2k}\overrightarrow{AB}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \frac{k+2}{2k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\right] = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OT}, \text{ adică cele două centre de} \\ &\text{greutate coincid.} \quad \textbf{(2p).} \end{aligned}$$

Problema 4

Considerăm că termenii șirului sunt: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \quad \textbf{(1p)}$$



Presupunem că a^2 este cel mai mare pătrat perfect mai mic decât s_n **(1p)**

Avem $s_n \leq n \cdot x_n - n(n-1)$ **(2p)**

Obținem $x_{n+1} \geq \frac{s_n}{n} + n + 1$ **(1p)**

$(a+1)^2 < (\sqrt{s_n} + 1)^2 = s_n + 2\sqrt{s_n} + 1 \leq s_n + \frac{s_n}{n} + n + 1 \leq s_n + x_{n+1} = s_{n+1}$ **(2p)**

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.