



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

BAREM CLASA a X-a

1. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ este rațional.

Rezolvare: Fie $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Rezultă că $x^3 + 3x - 4 = 0$ (4p) adică $(x-1)(x^2+x+4) = 0$, de unde $x = 1$ (3p).

2. a) Să se găsească cea mai mare valoare a produsului $a \cdot b$ știind că $\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b = 1$, $a, b \in (0,1)$.

Rezolvare: $\log_{\frac{1}{2}}(ab) = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} b \geq 2 \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b} = 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ (2p). Rezultă că $ab \leq \frac{1}{4}$ (1p).

- b) Dacă $a, b, c > 1$, să se arate că: $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$.

Rezolvare: $\log_a \frac{b+c}{2} \geq \log_a \sqrt{bc} = \frac{\log_a b + \log_a c}{2} \geq \sqrt{\log_a b \cdot \log_a c}$ (2p)

Înmulțind cu relațiile omoloage, obținem inegalitatea cerută. (2p)

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [2, \infty)$, $f(x) = a^x + a^{-x}$ unde $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

- a) Să se arate că f este surjectivă. Este f bijectivă?

- b) Să se arate că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ dat avem $\sum_{k=1}^n f(kx) \geq 2n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: a) Fie

$$y \in [2, \infty) \text{ a.î. } f(x) = y \Rightarrow a^x + \frac{1}{a^x} = y \Rightarrow a^{2x} - y \cdot a^x + 1 = 0 \Rightarrow a^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} > 0.$$

Așadar $x_1 = \log_a \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ și $x_2 = \log_a \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}$

. Deci f surjectivă. (2p)

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a + \frac{1}{a} \\ f(-1) &= \frac{1}{a} + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = f(-1). \text{ Cum } 1 \neq -1 \text{ rezultă că } f \text{ nu este injectivă deci } f \text{ nu este}$$

bijectivă. (2p)

$$\text{b) } f(kx) = a^{kx} + a^{-kx} = a^{kx} + \frac{1}{a^{kx}} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \text{ și } k = \overline{1, n} \quad (2p)$$

Rezultă că $\sum_{k=1}^n f(kx) \geq \sum_{k=1}^n 2 = 2n$ (1p).

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

4. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Să se arate că:

a) $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = 3 \cdot (1 + |z|^2), \forall z \in \mathbb{C}$.

b) $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| \geq 3, \forall z \in \mathbb{C}$.

Rezolvare: a)

$$\begin{aligned} &|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + |z - z_3|^2 = \\ &(z - z_1)(\overline{z - z_1}) + (z - z_2)(\overline{z - z_2}) + (z - z_3)(\overline{z - z_3}) \quad (2p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3|z|^2 - z \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z} \cdot (z_1 + z_2 + z_3) + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3|z|^2 + 3 \\ &= 3(|z|^2 + 1) \quad (2p) \end{aligned}$$

$$\text{b) } |z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| = |z_1| \cdot \left| \frac{z}{z_1} - 1 \right| + |z_2| \cdot \left| \frac{z}{z_2} - 1 \right| + |z_3| \cdot \left| \frac{z}{z_3} - 1 \right| \quad (2p)$$

$$\geq \left| \frac{z}{z_1} - 1 + \frac{z}{z_2} - 1 + \frac{z}{z_3} - 1 \right| = \left| z \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) - 3 \right| = 3 \quad (1p)$$

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7