CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

Se consideră mulțimea $Q\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,/\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$

a) Demonstrați că pentru orice $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, dacă $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, atunci $a=c$ și $b=d$

b) Determinați $x,y\in\mathbb{Q}$ care verifică egalitatea $\dfrac{x+y\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=2$

c) Arătați că numerele $\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2$ și $\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ sunt din $Q\left(\sqrt{2}\right)$.

d) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ nu există n numere din $Q\left(\sqrt{2}\right)$ încât suma pătratelor lor să fie $1+\sqrt{2}$.

SOLUȚIE:

a) $b\neq d \Rightarrow \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ (F) $\Rightarrow b=d$ 1p

$b=d \Rightarrow a=c$ 1p

b) $x+y\sqrt{2}=4-\sqrt{2} \Rightarrow x=4,\ y=-1$ 2p

c) Verificare 1p

d) Fie $1+\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 1+\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2a_ib_i\sqrt{2}+2b_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2b_i^2\right)+\left(2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2+2b_i^2\right)=1$ și $2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=1$ 1p

$\Rightarrow 1-\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^2$, contradicție cu $1-\sqrt{2}<0$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 2.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1 & ;\ x<-1\\ x-2 & ;\ x\in[-1;1]\\ -3x+2; & x>1\end{cases}$. Se cere:

a) Arătați că rezultatul calculului $3f\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)+f\left(\sqrt{8}-1\right)$ este număr rațional.

b) Determinați numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $A(2;a)$ și $B(b;-2)$ sunt puncte pe graficul funcției f.

c) Determinați dacă există două numere $m,n\in\mathbb{R}$ încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să se verifice $f(x)=m\cdot|x+1|+n\cdot|x-1|$.

SOLUȚIE:

a) $\sqrt{2}-\frac{5}{2}<-1$, $\sqrt{8}-1>1$ 1p

$3f\left(\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)+f\left(\sqrt{8}-1\right)=-13\in\mathbb{Q}$ 1p

b) $A(2;a)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=a$, respectiv $B(b;-2)\in G_f \Leftrightarrow f(b)=-2$ 1p

$a=-4$ 1p

$b=-\frac{1}{2}$ nu convine, $b\in\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$ 1p

c) Dacă există $m,n\in\mathbb{R}$ în condiția cerută, $f(1)=2m=-1$ și $f(-1)=2n=-3$ 1p

Din $f(x)=m\cdot|x+1|+n\cdot|x-1| \Rightarrow f(2)=3m+n=-3$ în contradicție cu $f(2)=-4$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX –a

Problema 3.

În triunghiul ABC cu laturile de lungimi $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ și $b\neq c$, considerăm $[AD$, cu $D\in(BC)$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ încât $[BM]\equiv[CN]$. Dacă P este mijlocul laturii $[BC]$ și Q este mijlocul segmentului $[MN]$, demonstrați următoarele:

a) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) $2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

c) $PQ\,||\,AD$

SOLUȚIE:

a) Din teorema bisectoarei $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ 2p

b) $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$ 1p

$\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{O}$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{O}\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$ 1p

c) Dacă $BM=CN=d$, atunci $\overrightarrow{MB}=\dfrac{d}{c}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}=\dfrac{d}{b}\overrightarrow{AC}$ 1p

$\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\dfrac{d}{c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{d}{b}\overrightarrow{AC}=\dfrac{d}{bc}\left(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}\right)$ 1p

$\Rightarrow 2\overrightarrow{QP}=\dfrac{d(b+c)}{bc}\cdot\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\dfrac{d(b+c)}{bc}\overrightarrow{AD}\Rightarrow PQ\,||\,AD$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 4.
Un copil se joacă umplând cu semne ”x” și ”o” pătrățelele ultimei foi a unui caiet de lucru, după o regulă inventată de el: scrie un semn ”x”, apoi două semne ”o”, apoi trei ”x”, apoi patru ”o”, apoi cinci ”x” și continuă la fel până umple un careu pătrat cu 121 de pătrățele, după care își continuă jocul și se oprește când scrie al 2019-lea semn. Se cere:

a) Aflați care din cele două semne a fost scris ultimul în careul pătrat.
b) Aflați care din cele două semne este cel de al 2019-lea semn.
c) Arătați că numărul total al unuia din cele 2019 semne scrise este pătrat perfect.
d) Arătați că de fiecare dată când copilul scrie un semn ”o”, cel puțin unul din cele două totaluri de semne de același fel prezente la acel moment pe foaie este pătrat perfect.

SOLUȚIE:

a) În careul pătrat, copilul scrie ”x”-uri în număr de $a=1+3+5+7+...$, respectiv ”o”-uri în număr de $b=2+4+6+8+...$ 1p

cu un număr total $(1+2+3+...+n)+p=\frac{n(n+1)}{2}+p=121$, cu $n\in\mathbb{N}$ maxim posibil 1p

Cum $121=\frac{15\cdot 16}{2}+1=(1+3+...+15)+(2+4+6+...+14)+1$, al 121-lea semn scris este ”o” 1p

b) $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}\le 2019 \Leftrightarrow n(n+1)\le 4038$, $\sqrt{4038}\in(63;64)$ 1p

$\frac{63\cdot 64}{2}=2016<2019<\frac{64\cdot 65}{2}$, deci $2019=(1+2+3+...+63)+3$ și al 2019 -lea semn scris este ”o” 1p

c) Numărul total al ”x”-urilor scrise este $1+3+5+...+63=32^2$ 1p

d) Numărul total al ”x”-urilor scrise este de forma $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 1.

Demonstrați afirmațiile:

a) Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$.

b) Pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$, dacă $\sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$

c) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

d) Mulțimea $A=\left\{\sqrt{n+1}+\sqrt{16n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$ conține doar două numere raționale.

SOLUȚIE:

a) Considerând $\sqrt{x}=\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, atunci $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ 1p

Deci dacă $x \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ 1p

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x}=a-\sqrt{y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{y}=\dfrac{a^2+y-x}{2a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{y} \in \mathbb{N}$. Analog $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ 1p

c) Considerând $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n}, \sqrt{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n}, \sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$ 1p

$\Rightarrow n=a^2,\ n+1=b^2 \Rightarrow n=0$, contradicție 1p

d) $\sqrt{n+1}+\sqrt{16n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{16n+1} \in \mathbb{N}$ 1p

$\begin{cases} n+1=a^2 \\ 16n+1=b^2 \end{cases} \Rightarrow 16a^2-b^2=15 \Rightarrow (4a-b)(4a+b)=15$, cu $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow A=\{2; 9\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ 16 martie 2019

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 2.

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $1+\log_x \frac{5-x}{10}=(2\lg 2-1)\cdot \log_x 10$

b) Arătați că $x=3$ este singura soluție reală a ecuației $2^x-\frac{1}{\sqrt{x-2}}=7$.

SOLUȚIE:

a) Condiție de existență $x\in(0;5)\setminus\{1\}$ 1p

Transformând în baza 10, se obține echivalenta $\lg x+\lg(5-x)=\lg 4$ 1p

$\Rightarrow x(5-x)=4$, cu soluții $x_1=1,\ x_2=4$ 1p

și din condiția de existență rămâne soluție a ecuației inițiale doar $x=4$ 1p

b) $x=3$ verifică ecuația 1p

$x>3 \Rightarrow 2^x-7>1>\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 1p

$x<3 \Rightarrow 2^x-7<1<\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 3.

Considerând numărul complex $z=1-i\sqrt{3}$, se cere:

a) Să se arate că $z^2-2z+4=0$ și $z^3+8=0$

b) Să se demonstreze că numărul $t=\left(3z^2-4z+4\right)\left(z^2-3z+2\right)$ este real

c) Să se calculeze suma $S=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{16}z^5-\frac{1}{32}z^6$

SOLUȚIE:

a) Verifică / rezolvă $z^2-2z+4=0$ 2p

$z^2=2z-4 \Rightarrow z^3=2z^2-4z=2(2z-4)-4z=-8$ sau alternativă 1p

b) $t=(2z-8)(-z-2)=-2z^2+4z+16=24\in\mathbb{R}$ 2p

c) $z^2=2(z-2)$, $z^3=-8$, $z^4=-8z$, $z^5=-16(z-2)$, $z^6=64$ 1p

$\Rightarrow S=0$ 1p

Alternativă la c):

$S=\frac{z^3-2z^2+4z}{4}-\frac{z^6-2z^5+4z^4}{32}$ 1p

$\Rightarrow S=\frac{z\left(z^2-2z+4\right)}{4}-\frac{z^4\left(z^2-2z+4\right)}{32}=0$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X -a

Problema 4.

Fie mulțimea $M=\left\{x(a;b)/x(a;b)=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbb{N}^*,\ a<b,\ (a;b)=1\right\}$, unde prin notația $(a;b)=1$ înțelegem că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă. La fiecare $x(a;b)\in M$, numim *strada lui* $x(a;b)$ intervalul $s[a;b]$, cu $s[a;b]=\left[\frac{4ab-1}{4b^2};\frac{4ab+1}{4b^2}\right]$ iar numerele reale $x\in s[a;\,b]$ le numim *vecinii lui* $x(a;b)$.

a) Arătați că orice $x\in(0;1)$ este *vecin* al lui $x(a;b)$, dacă și numai dacă $\left|x-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{4b^2}$.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{5}}{4}$ *este vecin* al lui $x(1;2)$ și $\frac{\sqrt{3}}{4}$ *nu este vecin* al lui $x(1;2)$.

c) Arătați că orice $x_0\in M$ are o infinitate de *vecini* $x\in M$ dar și o infinitate de $x\in M$ care *nu-i sunt vecini*.

SOLUȚIE:

a) $s[a;b]=\left[\frac{a}{b}-\frac{1}{4b^2};\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}\right]$ 1p

rezultă $x\in s[a;b]\Leftrightarrow\frac{a}{b}-\frac{1}{4b^2}\le x\le\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4b^2}\le x-\frac{a}{b}\le+\frac{1}{4b^2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{a}{b}\right|\le\frac{1}{4b^2}$ 2p

b) $\frac{\sqrt{5}}{4}\in s[1;2]\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\le 9\Leftrightarrow 80\le 81$ (A), deci $\frac{\sqrt{5}}{4}\in s[1;2]$ 1p

$\frac{\sqrt{3}}{4}\in s[1;2]\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{16}\Leftrightarrow 7\le 4\sqrt{3}\Leftrightarrow 49\le 48$ (F). deci $\frac{\sqrt{3}}{4}\notin s[1;2]$ 1p

c) Spre exemplu, pentru orice $x_0=x(a;b)\in M$, alegând $x_n=\frac{a}{b}+\frac{1}{4b^n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 3\Rightarrow x_n\in M$

și totodată $\left|x_n-\frac{a}{b}\right|=\frac{1}{4b^n}<\frac{1}{4b^2}\Rightarrow x_n\in s[a;b]$, cu $x_{n+1}<x_n$ 1p

Analog, observând că la orice $x_0=x(a;b)\in M$, $\frac{4ab+1}{4b^2}<1$, cum media aritmetică a două numere distincte este mijlocul intervalului celor două numere, șirul definit de recurența $y_1=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab+1}{4b^2}+1\right)$, $y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{4ab+1}{4b^2}+y_n\right)$ va avea toți termenii din M și nici unul nu va fi vecin al lui $x_0=x(a;b)$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+3}\right)$.

b) Determnați $a\in(0;+\infty)$ și $b\in\mathbb{R}^*$ încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=2$.

SOLUȚIE:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)-3\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]=$ 1p

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}-\dfrac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}\right)=\dfrac{1}{2}+2-\dfrac{9}{2}=-2$ 2p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx}{x^2-1}=0$ 1p

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=a^\infty=$ limită finită nenulă $\Rightarrow a=1$ 1p

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=e^b$ 1p

$e^b=2\Rightarrow b=\ln 2$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 2.

Considerând $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi și cu elemente din mulțimea numerelor reale, se cere:

a) Demonstrați că orice matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifică $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$.

b) Demonstrați că orice pentru orice alegere de două matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ are loc $\det(X \cdot Y) = \det X \cdot \det Y$

c) Considerând $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ încât $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2018 & 1 \\ 2019 & 1 \end{pmatrix}$ arătați că $A \cdot B$ este inversabilă și $B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2019 I_2$.

SOLUŢIE:

a) Calculează X^2 .... 1p
   Finalizează verificarea 1p

b) Calculează $\det(X \cdot Y)$ 1p
   Finalizează verificarea 1p

c) $\det(A \cdot B) = -1 \Rightarrow \det(B \cdot A) = -1 \Rightarrow B \cdot A$ inversabilă 1p
   $B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2019 I_2 \Leftrightarrow (B \cdot A)^2 - 2019(B \cdot A) - I_2 = O_2$, confirmată de a) 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 3.

Considerând funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-1}, & x\in(-\infty;\ 0)\\ x^2-3, & x\in[0;\ 2]\\ \sqrt{x-1}, & x\in(2;+\infty)\end{cases}$, se cere:

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.
b) Rezolvați ecuația $f(x)\le 1$, $x\in\mathbb{R}$.
c) Arătați că ecuația $x\cdot f(x)=3$ are o singură soluție $x\in(2;+\infty)$

SOLUŢIE:

a) asimptotă orizontală spre $-\infty$, de ecuație $y=2$ 1p
nu are asimptote spre $+\infty$ 1p
nu are asimptote verticale 1p

b) Funcția este continuă pe $\mathbb{R}$ și ecuația $f(x)-1=0$ are soluțiile $x_1=-4$ și $x_2=2$ iar din tabelul de semn se deduce $f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\in[-4;\ 2]$. 2p

c) Considerăm funcția continuă $g:(2;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f(x)-3$, deci $g(x)=x\sqrt{x-1}-3$, care se dovedește strict crescătoare și cum $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x)=-1$ și $g(3)=3\left(\sqrt{2}-1\right)>0$, rezultă concluzia 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XI –a

Problema 4.

Considerând, în planul cartezian ortogonal, graficul G_f al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x-2)(3x^2-1)}{4(x^2+1)}$, respectiv punctele $A=A(-2;0)$, $B=B(2;3)$, $C=C(2;0)$ și $M_x=M(x;f(x))$, se cere:

a) Verificați că punctul C este pe graficul funcției f și arătați că acest grafic are asimptotă oblică spre $+\infty$ o dreaptă care trece prin C și este paralelă dreptei AB.

b) Folosind eventual cele verificate anterior, determinați limitele $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}A(x)$, $l_2=\lim\limits_{x\to\infty}d(x)$ și $l_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M_xA}{M_xB}$, unde $A(x)$ este aria triunghiului ABM_x, $d(x)$ este distanța de la punctul M_x la dreapta AB iar M_xA și M_xB sunt lungimile respectivelor segmente $[M_xA]$ și $[M_xB]$.

SOLUŢIE:

a) $f(2)=0 \Rightarrow C(2;0)\in G_f$ 1p

Obține ecuația asimptotei $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$ 1p

Obține panta $m_{AB}=\dfrac{3}{4}$ a dreptei AB 1p

Deduce $m=\dfrac{3}{4}$ panta asimptotei, din care rezultă paralelismul cerut de enunț 1p

b) Interpretând eventual datele punctului anterior, obține:

$l_1=\lim\limits_{x\to\infty}A(x)=12$ 1p

$l_2=\lim\limits_{x\to\infty}d(x)=\dfrac{12}{5}$ 1p

$l_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M_xA}{M_xB}=1$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII –a

Problema 1.

Pentru numerele impare $x \in \mathbb{Z}$, considerăm matricele $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\{A(x) / x \in \mathbb{Z},\ x \text{ număr impar}\}$.

a) Arătați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G și $(G;\cdot)$ este grup abelian.

b) Arătați că orice matrice $A(x)$ din G este inversabilă în $(G;\cdot)$, cu toate că $\det A(x)=0$. Explicați acest fapt.

c) Demonstrați că $f: G \to 2\mathbb{Z}$, $f(A(x))=x+1$ este izomorfism de la $(G;\cdot)$ la $(2\mathbb{Z};+)$, unde $2\mathbb{Z}=\{2x / x \in \mathbb{Z}\}$.

SOLUŢIE:

a) Se verifică $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+1)$ și cum $x+y+1$ este întreg impar la orice $x, y \in \mathbb{Z}$ impare, ”$\cdot$” este lege de compoziție pe G 1p
Conform cu $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+1)$, $(G;\cdot)$ este structură comutativă și asociativă 1p
cu element neutru $E=A(-1)\in G$ 1p
În $(G;\cdot)$, inversa matricei $A(x)\in G$ este matricea $A(-x-2)\in G$ 1p

b) În acest caz $E \neq I_3$ și inversabilitatea se referă la structura $(G;\cdot)$, nicidecum la structura $(M_2(R);\cdot)$, în care $A(x)$ nu sunt inversabile 1p

c) Funcția f este bijectivă 1p
cu $f(A(x)\cdot A(y))=f(A(x+y+1))=f(A(x))+f(A(y))$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 2.

Pe $\mathbb{Z}$ definim legea $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Se cere:

a) Arătați că ”$\circ$” este asociativă și $(\mathbb{Z};\circ)$ are element neutru $e = 4$.

b) Determinați mulțimea elementelor inversabile în $(\mathbb{Z};\circ)$.

c) Cu notația $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ apare de n-ori}}$, rezolvați ecuația $x^{(2019)} = x$, în necunoscuta $x \in \mathbb{Z}$.

SOLUȚIE:

a) $x \circ y = (x-3)(y-3)+3 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = (x-3)(y-3)(z-3)+3$

sau verificare prin calcul direct 1p

Verificare $x \circ 4 = 4 \circ x = x$ 1p

b) $x \circ x' = x' \circ x = e \Rightarrow x' = \dfrac{3x-8}{x-3} \Rightarrow x \in (\mathbb{Z};\circ)$ este inversabil $\Leftrightarrow \dfrac{3x-8}{x-3} \in \mathbb{Z}$ 1p

$\dfrac{3x-8}{x-3} = 3 + \dfrac{1}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{2;4\}$ 1p

c) $x \circ x = (x-3)^2 + 3$ 1p

$x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ apare de n-ori}} = (x-3)^n + 3$ 1p

$x^{(2019)} = x \Leftrightarrow (x-3)^{2019} - (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \in \{0;-1;1\} \Leftrightarrow x \in \{2;3;4\}$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 3.

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și F primitiva funcției f, care verifică $F(1)=0$.

a) Arătați că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{e-1}{2}$.

b) Calcuați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

SOLUȚIE:

a) $x^2=t$, $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 x e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{e-1}{2}$ 2p

b) Integrare prin părți: $\begin{cases} u=F(x) \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=f(x) \\ v=x \end{cases}$ 1p

$\Rightarrow \int_0^1 F(x)dx=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf(x)dx=-\frac{e-1}{2}$ 1p

c) $\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)$ 1p

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=e$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 4.
În urma unui studiu, s-a constatat că rata de memorare a cuvintelor vocabularului limbii engleze, pe parcursul unei lecții de 50 minute, este dată de relația $M(t)=[f(t)]$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului $x\in\mathbb{R}$ iar f este o funcție $f:[0;50]\to\mathbb{R}$, care verifică $f'(t)=\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}$ și $f(0)=0$, respectiv $M(t)$ reprezintă numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant pe intervalul de minute $[0;t]$ din parcursul lecției.

a) Arătați că $f(t)=\frac{t^2(90-t)}{3000}+\frac{3t}{t+1}$.
b) Determinați numărul total de cuvinte noi memorate de un cursant la momentul de minut $t=10$ al lecției.
c) Determinați câte cuvinte noi memorează un cursant în intervalul ultimelor 20 de minute din parcursul orei.

SOLUȚIE:

a) $f(t)\in\int\left(\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt$ 1p

$\int\left(\frac{6t}{100}-\frac{t^2}{1000}+\frac{3}{(t+1)^2}\right)dt=\frac{3t^2}{100}-\frac{t^3}{3000}-\frac{3}{(t+1)}+k=\frac{t^2(90-t)}{3000}-\frac{3}{(t+1)}+k,\ k\in\mathbb{R}$ 2p

$f(0)=0\ \ k=3$ 1p

b) $f(10)=5,3...$ 1p

$\Rightarrow\ M(10)=[f(10)]=5$ 1p

c) $M(50)-M(30)=36-20=16$ 1p