

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Determinați a și b numere reale astfel încat: $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_2$
b) Demonstrați că: $A^n = nA + (1 - n)I_2$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
c) Să se arate că suma elementelor matricei: $A + A^2 + \dots + A^n$ este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

PROBLEMA 2

- a) Calculați, scriind sub forma de produs determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$
b) Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^x & 4 & 16 \\ 8^x & 8 & 64 \end{vmatrix} = 0$

PROBLEMA 3

Calculați:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x + \tan x}$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$

PROBLEMA 4

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - ax - b, & x \geq 0 \\ 3x + c, & x < 0 \end{cases}$ Determinați parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că f este continuă și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.