



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H1

Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

- a) Să se arate că numărul $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$.
b) Calculați $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2} + \sqrt{3^{2+0.5\log_3 16}}$.

Barem

- a) $A^3 = (\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}})^3 + (\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}})^3 + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}})$ **1p**
 $A^3 = 14 - 3A$ **1p**
 Membrul stâng este funcție crescătoare, membrul drept este funcție descrescătoare, deci
 ecuația are soluție unică. $A=2$ **1p**
 b) $2\log_3 2 + 4\log_{81} 2 = 3\log_3 2$ **1p**
 $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2} = 3^{6\log_3 2} = 64$ **1p**
 $\sqrt{3^{2+0.5\log_3 16}} = 6$ **1p**
 rezultatul final $64+6=70$ **1p**

PROBLEMA 2

Să se arate că $\forall z \in \mathbb{C}$, avem: $\left|z + \frac{1}{2}\right|^2 + i\left|z + \frac{i}{2}\right|^2 + (1+i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1+i)z = z$.

Barem

Fie $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

Membrul stâng devine $\left|x + \frac{1}{2} + iy\right|^2 + i\left|x + i\left(\frac{1}{2} + y\right)\right|^2 - (1+i)(x^2 + y^2) - \frac{1}{4}(1+i)$... **2p**

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + i\left(x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2\right) - x^2 - y^2 - ix^2 - iy^2 - \frac{1}{4} - \frac{i}{4} =$ **3p**

Finalizare **2p**



PROBLEMA 3

Se consideră expresia $E(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{\log_{2x} 2} + \log_4 x^4 - 2 \log_2 \sqrt{2}$.

- Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care este definită expresia.
- Să se arate că $E(x) = \log_2 x$.
- Să se verifice dacă $E(x+1) - E(x) > 0$, oricare ar fi numărul real x pentru care este definită expresia.

Barem

- $x^2 \neq 0, 2x > 0, 2x \neq 1, x^4 > 0$ deci $x \in (0, +\infty) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ 2p
- $E(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x^2} \right) + \log_2 2x + \log_2 x^2 - \log_2 2$ 1p
- Finalizare 1p
- $E(x+1) - E(x) = \log_2 \left(\frac{x+1}{x} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ 1p
- Baza logaritmului este $2 > 1$, deci funcția $f(x) = \log_2 x$ este strict crescătoare. 1p
- Atunci $\log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) > 0, \forall x \in (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ 1p

PROBLEMA 4

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ cu proprietatea că $f(\log_3 x - 1) = \frac{x}{3}, \forall x \in (0, +\infty)$.

- Calculați $S = f(1) + f(2) + \dots + f(2025)$.
- Determinați funcția f .

Barem

- Se notează $\log_3 x - 1 = y$, deci $x = 3^{y+1}$ 2p
- Atunci $f(x) = 3^x$ 2p
- $f(1) + f(2) + \dots + f(2025) = 3 + 3^2 + \dots + 3^{2025} = \frac{3^{2026} - 3}{2}$ 3p