



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a IX-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

a) Determinați două numere naturale $x \in \mathbf{N}^*$ și $\overline{abc}$ astfel încât numărul $\sqrt{(\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca})x}$ să fie rațional, iar x să fie cel mai mic număr posibil.

b) Calculați $1 - \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010} - \frac{2009}{2010} \right|$.

PROBLEMA 2

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir pentru care $x_0 = 1$ iar $2x_{n+1} = x_n + 2$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi n natural nenul, este o progresie geometrică.

b) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

PROBLEMA 3

Calculați $\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2} \right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x .

PROBLEMA 4

Dacă M este punctul de intersecție a dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater convex $ABCD$, arătați că pentru orice punct O din planul patrulaterului avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $(z + i)^{100} + (z - i)^{100} = 0$

- a) Demonstrați că $|z + i| = |z - i|$
- b) Demonstrați că z este un număr real.

PROBLEMA 2

a) Arătați că $\sqrt{2n - \sqrt{4n^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$ b) Fie $S_n = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Găsiți cel mai mare număr natural n pentru care $S_n < \sqrt{2}$.

PROBLEMA 3

Demonstrați că $\log_{xyz} t + \log_{yzt} x + \log_{ztx} y + \log_{txy} z \geq \frac{4}{3}$, $\forall x, y, z, t \in (1, \infty)$

PROBLEMA 4

Determinați valorile reale ale lui m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2 + mx + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

este: a) injectivă b) surjectivă c) bijectivă.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Determinați a și b numere reale astfel încat: $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_2$
b) Demonstrați că: $A^n = nA + (1 - n)I_2$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
c) Să se arate că suma elementelor matricei: $A + A^2 + \dots + A^n$ este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

PROBLEMA 2

a) Calculați, scriind sub forma de produs determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

b) Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4^x & 4 & 16 \\ 8^x & 8 & 64 \end{vmatrix} = 0$

PROBLEMA 3

Calculați:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x + \tan x}$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{\sin x}}$

PROBLEMA 4

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} - ax - b, & x \geq 0 \\ 3x + c, & x < 0 \end{cases}$

Determinați parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că f este continuă și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H2

Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii

PROBLEMA 1

- 1) Se consideră $G=(0; \infty) \setminus \{1\}$ pe care se definește legea de compoziție $m * n = m^{\frac{\ln n}{2}}$, oricare ar fi $m, n \in G$. Rezolvați ecuația $x * x * x = x$.
- 2) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) + e^x + 3, & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4, & x < 0 \end{cases}$$
- a) Arătați că f admite primitive pe $\mathbb{R}$
- b) Pentru $x \in [0; \infty)$, calculați o primitivă a funcției $f(x)$, dacă $F(1) = \frac{(\ln 2)^2}{2} + e$.

PROBLEMA 2

Calculați

- a) $\int_{-2}^2 x^{2025} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} dx$
- b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3 + x} dx$

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea $G = (2025; \infty)$, pe care se definește $a \Delta b = ab - 2025a - 2025b + 2025^2 + 2025$ cu $a, b \in G$.

- a) Arătați că pentru orice $a, b \in G$ avem $a \Delta b \in G$.
- b) Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
- c) Determinați numerele reale $x, y \in G$ astfel încât $\lg x \Delta \lg y = \lg x$
- a) Demonstrați că funcția $f: (2025; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x - 2025)$ este un izomorfism între grupurile (G, Δ) și $(\mathbb{R}, +)$.
- b) Determinați $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $m \Delta n \in \mathbb{N}$

PROBLEMA 4

Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pe care se definește legea de compoziție „ $\circ$ ” prin:

$$(a, b) \circ (m, n) = (am, an + b)$$

- a) Arătați că legea este asociativă
- b) Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.
- c) Aflați două elemente (a, b) și (m, n) din G pentru care $(a, b) \circ (m, n) \neq (m, n) \circ (a, b)$
- d) Determinați $x \in G$, astfel încât $(2^x, 2 \cdot 2^x) \circ (2, 4 \cdot 2^x) = (1, 2)$