BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a IX-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. a) Determinați cardinalul mulțimii A={ a$\in Z$ | 4+ $\sqrt{a^2-2a+1}<2025\}$.

b) Dacă b<0, arătați că expresia $\sqrt{4b^2-4b+1}-3\sqrt{9-6b+b^2}+\sqrt{b^2}$ este constantă.

Barem

a) Scrierea expresiei sub forma $|a-1|<2021$...1 pct
Aducerea la forma -2021$<a-1<2021$...1 pct
Determinarea soluției A={ -2019, ..., 2021}..1 pct
| A|= 4041 ....1 pct

b) Scrierea expresiei sub forma |2b-1|-3|3-b|+|b|..1 pct
b$<0 \Rightarrow 2b-1<0,\ 3-b>0$...1 pct
Calculul -2b+1-3(3-b)-b= - 8, expresia este constantă.................. ……………………1 pct

2. Într-o grădină se plantează 2025 de flori pe rânduri astfel: pe primul rând se plantează o floare, pe al doilea rând 3 flori , pe al treilea rând 5 flori, și tot așa, respectându-se regula până se plantează toate florile.

a) Câte flori se plantează pe rândul 25?
b) Determinați numărul rândului pe care se plantează 77 de flori.
c) Determinați câte rânduri au fost plantate cu flori.
d) Este posibil ca pe un rând să fie plantate 91 de flori? Justificați.

Barem

a) 1,3,5, ..., x sunt termeni ai unei progresii aritmetice ....1 pct

$a_1=1, r=2$...1 pct

a_n= 2n-1..1 pct

a_{25}= 49 flori..1 pct

b)77=2n-1 $\Rightarrow$ n=39...1 pct

c) S_n =2025 $\Rightarrow$ n=45..1 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax**: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

d) Nu. 91=2n-1$=> n = 46 > 45$...1 pct

3. Fie triunghiul dreptunghic isoscel MAT cu lungimea catetei de 5 cm

a) Construiți punctul E și R astfel încât $\overrightarrow{ME}=-\overrightarrow{TA}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{RT}$,
b) Calculați $|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{EM}|$ și $|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{TM}|$
c) Arătați că punctele M,A,R sunt coliniare.
d) Arătați că pentru orice punct F din interiorul patrulaterului convex MATE are loc relația $\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FE}$

Barem

a) Construirea punctelor E și R..2 pct
b) $|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{EM}|=|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}|=|\overrightarrow{AE}|=5\sqrt{2}$ cm..1 pct
Cum MATE este pătrat avem $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{TE}$ și $|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{TM}|=|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{TE}-\overrightarrow{EM}|=|2\overrightarrow{ME}|=2\cdot 5=10\ cm$ ....1 pct
c) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{AR}=>$M,A,R coliniare..............................1 pct
d) F int pătrat MATE$=> \overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FT}=\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FE}=>\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{TF}+\overrightarrow{FE}=0->$ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{TE}=0=>\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{ET}=0$ 2pct

4. Se consideră șirul (a_n), n $\in \mathbf{N}$ cu termenul general $a_n=\frac{2^{2025}}{2^{n+2025}}$

a) Arătați că $a_n=\frac{1}{2^n}$, oricare ar fi n $\in$ **N.**
b) Arătați că șirul (a_n), n $\in$ N, este o progresie geometrică.
c) Arătați că suma $a_0+a_1+a_2+a_3+$............$+a_{2025}\in(1;2)$.

Barem

a) Verificare...1 pct
b) Verificare $a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$...2 pct
c) $a_0+a_1+a_2+a_3+$............$+a_{2025}= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\dots\dots\dots..+\frac{1}{2^{2025}}=$

$=-2(\frac{1}{2^{2026}}-1)=2(1-\frac{1}{2^{2025}})$...3 pct

$2(1-\frac{1}{2^{2025}})\in(1;2)$..1 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a X-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

PROBLEMA 1

a) Să se arate că numărul A=$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \in \boldsymbol{N}$.

b) Calculați $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}+\sqrt{3^{2+0.5\log_3 16}}$.

Barem

a) $A^3=(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}})^3+(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})^3+3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}})$ **1p**

$A^3=14-3A$ **1p**

Membrul stâng este funcţie crescătoare, membrul drept este funcţie descrescătoare, deci ecuația are soluţie unică. A=2 .... **1p**

b) $2\log_3 2+4\log_{81} 2=3\log_3 2$.. **1p**

$9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}=3^{6\log_3 2}=64$.. **1p**

$\sqrt{3^{2+0.5\log_3 16}}=6$ **1p**

rezultatul final 64+6=70.. **1p**

PROBLEMA 2

Să se arate că $\forall z\in \boldsymbol{C}$, avem: $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2+i\left|z+\frac{i}{2}\right|^2+(1+i)|z|^2-\frac{1}{4}(1+i)=z$.

Barem

Fie z=x+yi, x,y∈**R**

Membrul stâng devine $\left|x+\frac{1}{2}+iy\right|^2+i\left|a+i\left(\frac{1}{2}+y\right)\right|^2-(1+i)(x^2+y^2)-\frac{1}{4}(1+i)$…**2p**

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+i(x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2)-x^2-y^2-ix^2-iy^2-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}=$ **3p**

Finalizare..**2p**

PROBLEMA 3

Se consideră expresia $E(x)=\log_2\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{\log_{2x}2}+\log_4 x^4-2\log_2\sqrt{2}$.

a) Să se determine $x \in \boldsymbol{R}$ pentru care este definită expresia.

b) Să se arate că $E(x)=\log_2 x$.

c) Să se verifice dacă $E(x+1)-E(x)>0$, oricare ar fi numărul real x pentru care este definită expresia.

Barem

a) $x^2 \neq 0, 2x > 0, 2x \neq 1, x^4 > 0$ $deci$ $x \in (0,+\infty)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **2p**

b) $\mathrm{E(x)} = \log_2\left(\frac{1}{x^2}\right) + \log_2 2x + \log_2 x^2 - \log_2 2$.................................... **1p**

Finalizare **1p**

c) $E(x+1)-E(x)=\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right)=\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **1p**

Baza logaritmului este $2>1$, deci funcția f(x)=$\log_2 x$ este strict crescătoare. **1p**

Atunci $\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)>\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)>0, \forall x\in(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **1p**

PROBLEMA 4

Se consideră funcția f: $\boldsymbol{R} \to (0,+\infty)$ cu proprietatea că $f(\log_3 x - 1) = \frac{x}{3}$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

a) Calculați S= f(1) + f(2) +....+ f(2025).
b) Determinați funcția f.

Barem

a) Se notează $\log_3 x - 1 = y$, deci x=3^{y+1}.. **2p**

Atunci f(x) = 3^x.. **2p**

b) f(1) + f(2) +....+ f(2025)= $3 + 3^2 + ... + 3^{2025} = \frac{3^{2026}-3}{2}$ **3p**

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XI-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{x} \\ 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x\epsilon\mathbb{R}$.
   a) Determinati valoarea numarului real x astfel incat det(A(x))=1
   b) Demonstrati ca: det(A(x)$\cdot A(1)-A(x+1))>0, oricare\ ar\ fi\ x>0$
   c) Aratati ca determinantul matricei $B(n)=A(1^2)+A(2^2)+\ldots+A(n^2)$ este diferit de zero oricare ar fi n numar natural mai mare sau egal cu 2.

   Barem

1. a) det(A(x))=$\sqrt{x}-1$ ………………………………………………………………… 1p

   x=4 ……………………………………………………………………………… 1p

   b) calcul A(x)$\cdot A(1)-A(x+1)$ …………………………………………….. 1p

   calcul determinant ………………………………………………………………… 1p

   concluzia ………………………………………………………………………….. 1p

   c)calcularea lui B(n) ………………………………………………………….1p

   demonstrarea cerintei ……………………………………………………………. 1p

2. Fie A(1,1), B(-1, -2), C(p,q) trei puncte in plan.
a) Daca C apartine dreptei de ecuatie x+y-3=0 sa se determine valorile lui p si q numere naturale astfel incat aria triunghiului ABC sa fie minima si sa se determine valoarea ariei in acest caz.
b) Calculati distanta de la C la AB daca C(1, 2)

   Barem

2. a) A=$\frac{1}{2}|3p-2q-1|$ ………………………………………………………… 1p

   C apartine dreptei date => p+q-3=0 => q=3-p ………………………………. 2p

   A=$\frac{1}{2}|5p-7|$ are valoarea minima egala cu 1 pentru

   p=1=> q=2 ……………………………………………………………………… 2p

c) ecuatia dreptei AB: 3x-2y-1=0 ……………………………………………............ 1p

   distanta=$\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ……………………………………………………………..1p

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro

3. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x}}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Determinați D;
b) Calculați $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)$;
c) Determinați ecuațiile tuturor asimptotelor funcției.

Barem

a) $x^2 - 3x > 0$ …………………………………………………………………… 1p

$D = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ ……………………………………………………… 1p

b) $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$ ………………………………………………………………… 1p

c) $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ asimptotă verticală la stânga ……………………………… 1p

$\lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 3$ asimptotă verticală la dreapta …………………………… 1p

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ …………………………… 1p

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ ……………………… 1p

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b \cdot \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția este continuă.

Barem

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{\ln(1+(-x))}{-x} \cdot \frac{-x}{x} = -1$ ……………………………………………… 2p

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = b \cdot \lim\limits_{x \searrow 0} \left(1 + \frac{-x}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{-x} \cdot \frac{-x}{3x+1} \cdot \frac{1}{x}} = b \cdot e^{-1}$ ……………………………………… 2p

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0)$ ……………………………………………………1p

$f(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) \Rightarrow a = -1$ ……………………………………………………1p

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) \Rightarrow b = -e$ ……………………………………………………… 1p

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax**: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

BAREM

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ – 08.02.2025

Clasa a XII-a

Secțiunea H1
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. Fie funcția f: R→ R f(x)=$\begin{cases} 2xe^{x^2}+e^x+3\,, & x\geq 0 \\ x^2+2x+4, & x<0 \end{cases}$

a) Arătați că f admite primitive pe R
b) Pentru x∈[0; ∞), calculați o primitivă a funcției f(x), dacă F(1)=2e.

Barem

a) f continuă pe (-∞; 0)......1 pct
f continuă pe (0;∞) ......1 pct
$l_s(0)=l_d(0)$= f(0)= 4......1 pct
f continuă pe R......1 pct
b) $\int f(x)dx = e^{x^2}+e^x$+3x+c......2 pct
$c=-3$......1 pct

2. Calculați

a) $\int_{-2}^{2} x^{2025}\sqrt{x^2-2x+1}$ dx

b) $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3+x}$ dx

Barem

a) $\int_{-2}^{2} x^{2025}|x-1|$dx......1 pct
$\int_{-2}^{2} x^{2025}|x-1|$dx= $\int_{-2}^{1} x^{2025}$(1-x) dx+ $\int_{1}^{2} x^{2025}$(x-1) dx......1 pct
Finalizare...... 2 pct
b) Arată că f impară ......2 pct
Din f impară avem $\int_{-2025}^{2025} \sqrt[3]{x^3+x}$ dx= 0......1 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 **Fax**: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - **E-mail**: contact@isjbihor.ro

3. Se consideră mulțimea G= (2;∞), pe care se definește $a\Delta b= ab-2a-2b+6$, cu a, b∈ G.

a) Arătați că pentru orice a,b∈ G avem $a\Delta b\in G$.
b) Arătați că (G, Δ) este grup abelian.
c) Determinați numerele reale x, y∈ G astfel încât lgx Δ lgy= lgx
d) Demonstrați că funcția f: R→ $(2;\infty), f(x) = 2025^x+2$ este un izomorfism între grupurile (R,+) și (G,Δ).
e) Determinați m,n $\in Q \setminus Z$ $astfel$ încât mΔn∈ N

Barem

a) Verificare..1pct
b) Verificarea proprietăților ....2 pct
c) aΔb= (a-2)(b-2)+2 =>(lgx-2)(lgy-2)-(lgx-2)=0 =>(lgx-2)(lgy-3)=0
   finalizare...1 pct
d) f bijectivă..1 pct
   Verificare f morfism...1 pct
e) ex m-2=3/5 și n-2= 5/3 => $m\Delta n = 3$ număr natural...1 pct

4.

a) Pe mulțimea M={0,1,2,3,4} se definește legea de compoziție x○y=min(x,y), pentru orice x,y∈ M. Alcătuiți tabla operației „○”, și stabiliți dacă M este parte stabilă în raport cu „○”.
b) Pe mulțimea Z_6 se definește operația algebrică $x*y=\hat{3}x+\hat{5}y+\hat{4}$, oricare ar fi x.y∈ Z_6

   Alcătuiți tabla operației „*” și stabiliți dacă operația dată este asociativită.

Barem

a) Alcătuirea tablei operației...2 pct
   M este parte stabilă în raport cu operația...1 pct
b) Alcătuirea tablei operației ....2 pct
   Verificare asociativitate...2 pct

Adresa: Str. Mihai Eminescu, Nr. 11, 410019, Oradea,
Tel./fax: +40 (0) 259 41 64 54, +40 (0) 259 47 02 22 Fax: +40 (0) 259 41 80 16,
Web: www.isjbihor.ro - E-mail: contact@isjbihor.ro