



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Profilul real specializarea științele naturii

Profilul tehnic

Etapă locală, 17 februarie 2018**Clasa a IX-a****Subiectul 1 (7 puncte)**

Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 1| + |x^2 - 1| + \dots + |x^{2018} - 1| = 0$

b) $\left[\frac{x+5}{3}\right] = \frac{x+6}{5}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Barem

a) Cum $|x - 1| \geq 0, |x^2 - 1| \geq 0, \dots, |x^{2018} - 1| \geq 0$ **1p**

Suma va fi egală cu 0 dacă $x - 1 = 0, x^2 - 1 = 0, \dots, x^{2018} - 1 = 0$ **1p**

Rezultă $x = 1$ este soluție. **1p**

b) $\left[\frac{x+5}{3}\right] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+6}{5} = k \Rightarrow x = 5k - 6$ **1p**

$k \leq \frac{x+5}{3} < k+1 \Rightarrow k \leq \frac{5k-6+5}{3} < k+1$ **1p**

Găsește $\frac{1}{2} \leq k < 2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$ **1p**

Soluția $x = -1$ **1p**

Subiectul 2 (7 puncte)

Câte elemente are mulțimea $A \cup B$ dacă $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbb{N}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x - 2| \leq 3\}$?

Barem

$\sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbb{N}$ implică, $\frac{4x-5}{x+1} \in \mathbb{N}$ și să fie pătrat perfect **1p**

$4 - \frac{9}{x+1} \in \mathbb{N}$ **1p**

$$A = \{2\} \dots\dots\dots 2p$$

$$-3 \leq x - 2 \leq 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Numărul elementelor mulțimii } A \cup B \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3 (7 puncte)

Să se arate că numărul $n^5 + 4n$ este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem

$$\text{Fie } x_n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2), n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

$$x_n : 5 \text{ ca produs de 5 numere naturale consecutive} \dots\dots\dots 1p$$

$$x_n = n^5 - 5n^3 + 4n \dots\dots\dots 1p$$

$$x_n + 5n^3 = n^5 + 4n \dots\dots\dots 1p$$

$$x_n + 5n^3 : 5 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rezultă } n^5 + 4n \text{ este divizibil cu 5, oricare ar fi } n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 1p$$

Obs: se acceptă și alte demonstrații, de exemplu inducția matematică.

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie triunghiul ABC. Considerăm $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 2DC$, $E \in (AB)$ astfel încât $AE = EB$ și F este mijlocul medianei CE. Arătați că $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Barem

$$\text{Desen} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Exprimă } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 1p \quad \text{Găsește } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \frac{4}{3}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Din relațiile (1) și (2)} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 1p$$