



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profilul uman

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Se consideră matricele $G(x) = \begin{pmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$

- a) Să se arate că $G^n(x) = G(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
- b) Să se calculeze determinantul matricei: $G(0) + G(1) + G(2) + \dots + G(2016)$

Subiectul 2 (7 puncte)

Se consideră mulțimea:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q}).$$

- a) Să se arate că pentru oricare matrice $A, B \in G$ are loc egalitatea $A \cdot B = B \cdot A$;
- b) Să se determine matricea $E \in G$ pentru care $E \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Subiectul 3 (7 puncte)

Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$.

Subiectul 4 (7 puncte)

Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 1 \\ x + (2a-1)y + 3z = 1, a \in \mathbb{R} \\ x + ay + (a-3)z = 1 \end{cases}$$

cu matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

- a) Să se rezolve ecuația $\det(A) = 0$;
- b) Să se rezolve sistemul pentru $a = 0$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.