



## Clasa a X-a

### Barem de corectare și notare:

- 1.) a.) Pentru  $(f \circ g): B \rightarrow B, (f \circ g)(x) = x$  (1p)  
 Și pentru  $(g \circ f): A \rightarrow A, (g \circ f)(x) = x$  (1p)  
 b.) Arată ca  $f$  este bijectivă (1p)  
 Arată ca  $g$  este bijectivă (1p)  
 Din punctul a.) deduce  $f^{-1} = g$  și  $g^{-1} = f$  (1p)  
 c.) Vom avea  $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{N}^*$  (1p)  
 De unde  $x - 1 \in \{1, 2\}$  și  $x \in \{2, 3\}$  (1p)
- 2.) Fie  $z = a + bi$  cu  $|z| = 1$  rezultă  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$  (1p)  
 Calculăm  $\frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} = 2a^2 - 2(1 - a^2) = 4a^2 - 2$  (2p)  
 Rezolvând ecuația  $|4a^2 - 2| = 1$  avem  $4a^2 - 2 = 1$  cu soluțiile  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (1p)  
 Sau  $4a^2 - 2 = -1$  cu soluțiile  $\pm \frac{1}{2}$  (1p)  
 $z \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}$  (2p)
- 3.) a.) Condițiile de existență  $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases}$  (1p)  
 Rezultă domeniul de existență  $D = (1, \infty) - \{2\}$  (1p)  
 b.) Pentru  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  produsul  $x(x-1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$  deci  $x-1 = \frac{1}{x}$  (1p)  
 Și vom avea  $\log_x(x-1) = \log_{x-1} x = -1$  de unde  $E\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$  (1p)  
 c.)  $E(x) = \log_x(x-1) + \frac{1}{\log_x(x-1)} + 2 = \frac{[\log_x(x-1)+1]^2}{\log_x(x-1)} \geq 0$  (2p)  
 Pentru că  $\log_x(x-1) > \log_x(2-1) = 0$  dacă  $x > 2$  (1p)
- 4.)  $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = p + \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}})^3 = (p + \sqrt{3})^3 \Rightarrow \dots\dots\dots(1p)$   
 $\Rightarrow \dots \Rightarrow 10+6\sqrt{3} = p^3 + 9p + (3p^2 + 3)\sqrt{3} \Rightarrow \dots\dots\dots(1p)$   
 $\Rightarrow \begin{cases} p^3 + 9p = 10 \\ 3p^2 + 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \dots\dots\dots(1p)$   
 $\Rightarrow \dots \Rightarrow p=1 \Rightarrow u=1+\sqrt{3} \dots\dots\dots(1p)$   
 Pentru determinarea lui  $v=1-\sqrt{3} \dots\dots\dots(2p)$   
 Pentru  $u+v=2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \dots\dots\dots(1p)$