



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

BAREM CLASA a XI-a

PROBLEMA 1

Dacă $n = 1$, sunt exact 2006 elemente în mulțimea M .

1p

Să considerăm acum n număr natural, $n \geq 2$.

Fie mulțimile $M_1 = \{A \in M / \det A > 0\}$ și $M_2 = \{A \in M / \det A < 0\}$.

1p

Cum matricele $A \in M$ sunt inversabile, va rezulta că $\det A \neq 0$ și, prin urmare,

$$M_1 \cup M_2 = M, \text{ iar } M_1 \cap M_2 = \emptyset \quad (1)$$

1p

Se construiește funcția $f : M_1 \rightarrow M_2$, $f(A)$ = matricea obținută prin schimbarea între ele a primelor două linii ale matricei A .

1p

Atunci f este corect definită și inversabilă, inversa funcției f fiind definită similar, prin schimbarea între ele a primelor două linii.

1p

Prin urmare, f este bijectivă $\rightarrow M_1$ și M_2 au același cardinal. Notăm $\text{card } M_1 = \text{card } M_2 = c$.

1p

Ținând seama de relațiile (1), se obține că mulțimea M are $2c$ elemente.

1p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

PROBLEMA 2

Din $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. 1p

Presupunem, prin reducere la absurd, că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior. Ar rezulta că acest șir este convergent $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 1p

Trecând la limită în relația de recurență se obține $e^{-x} = 0$, ceea ce este fals.

Înseamnă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 1p

Pentru a calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n}$ aplicăm criteriul Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x_n}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}} \cdot \frac{1}{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}} \cdot \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Acum, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}}$ o calculăm cu Stolz-Cesaro (e^{x_n} fiind șir crescător, nemărginit). 2p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n} (e^{x_{n+1}-x_n} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n} (e^{e^{-x_n}} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x_n}}{e^{e^{-x_n}} - 1} = 1.$$

Așadar, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}} = 1$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$. 1p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

PROBLEMA 3

1p

$$\begin{aligned} \text{Din } (n+1)^k \geq a \cdot n^k &\Rightarrow \frac{(n+1)^k}{n^k} \geq a \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq a \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq \ln a \Rightarrow \\ k \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq \ln a \Rightarrow k \geq \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

1p

Ținând seama că $k(n)$ este cel mai mic număr natural k cu proprietatea de mai sus,

$$\text{înseamnă că } k(n) = \left\lceil \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right\rceil \text{ sau } k(n) = \left\lfloor \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right\rfloor + 1 \text{ (după cum fracția}$$

1p

$$\frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \text{ este număr natural sau nu).}$$

De aici vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} &\leq k(n) \leq \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + 1 \Rightarrow \\ \frac{\ln a}{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} &\leq \frac{k(n)}{n} \leq \frac{\ln a}{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n} \Rightarrow \end{aligned}$$

2p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

$$\frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{k(n)}{n} \leq \frac{\ln a}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} + \frac{1}{n}$$

Trecând la limită în inegalitatea precedentă, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \ln a$.

1p

PROBLEMA 4

Cazul I

Presupunem că $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = -\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = +\infty$

Fie $d \in (a, c)$ și fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in (d, c)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ (un exemplu de șir

1p

de șir este șirul cu termenul general $x_n = c - \frac{c-d}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = -\infty$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ și deci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(d) > f(x_m)$.

1p

Fie $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $y_n \in (c, b)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$.

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = +\infty$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty$ și deci există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$f(y_p) > f(x_m)$.

1p

Avem deci $d < x_m < y_p$ iar $f(d) > f(x_m) < f(y_p)$, ceea ce probează că f nu poate fi monotonă în acest caz.

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

Cazul II

Presupunem că $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = +\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = -\infty$. Acest caz se tratează la fel ca și

1p

cazul I.

Cazul III

Presupunem că $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$.

Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in (a, c)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

1p

Fie șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $y_n \in (c, b)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty$.

Din acestea va rezulta că există $m, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_m < c < y_p$ iar $f(x_m) > f(c) < f(y_p)$ ceea ce probează că nici în acest caz f nu poate fi monotonă.

1p

Cazul IV

Presupunem că $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$. Acest caz se tratează la fel ca și cazul III.

1p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7