



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

BAREM CLASA a IX-a

- 1) G_A, G_B, G_C centrele de greutate ale triunghiurilor MBC, MAC, MAB

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{BG_B} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{CG_C} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

.....3 p

$$\overrightarrow{AG_A} + \overrightarrow{BG_B} + \overrightarrow{CG_C} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

.....2 p

Fie G central de greutate al triunghiului ABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

.....1 p

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow M = G$$

.....1 p

2) a) $\sqrt{ab+ac} = \sqrt{a(b+c)} \leq \frac{a+(b+c)}{2} = 8$

..... 1 p

$$\Rightarrow \sqrt{ab+bc} \leq 8$$

$$\sqrt{ac+bc} \leq 8$$

..... 1p

$$\Rightarrow \sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc} \leq 24$$

..... 1p

b)

$$(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+5})^2 = n+2+n+5+2\sqrt{(n+2)(n+5)} = 2n+7+2\sqrt{(n+2)(n+5)}$$

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ȘTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
11.02.2012

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+5})^2 \right] &= \left[2n+7 + 2\sqrt{(n+2)(n+5)} \right] = 2n+7 + \left[2\sqrt{(n+2)} \right] \\ &= 2n+7 + \left[\sqrt{4n^2 + 28n + 40} \right] \end{aligned}$$

.....2 p

$$(2n+6)^2 < 4n^2 + 28n + 40 < (2n+7)^2$$

.....1 p

$$\Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 + 28n + 40} \right] = 2n+6$$

$$\Rightarrow \left[(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+5})^2 \right] = 2n+7 + 2n+6 = 4n+13$$

.....1 p

3) Determinăm nr. k și l , $k \neq l$ a.î. $\frac{k^2+7}{k^2+k+6} = \frac{l^2+7}{l^2+l+6}$

.....1p

$$\Rightarrow kl - l - k - 7 = 0$$

.....2p

$$\Rightarrow (k-1)(l-1) = 8$$

.....1p

$$\Rightarrow (2,9) \text{ și } (3,5)$$

.....2p

$$\Rightarrow \text{card}A = 100 - 2 = 98$$

.....1p

4) Pentru $x := \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x^2} + 3 + 2x^2$

.....1

p

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 1$$

.....2 p

$$\frac{1}{f(k)-2} = \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

.....2 p

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{2012} \frac{1}{f(k)-2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013} \right)$$

.....2 p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7